ENS Lyon
M1 Probabilités

Mathématiques

Feuille d'exercices numéro 8
Martingales ; convergence presque sûre.

On rappelle le résultat suivant : une martingale positive converge presque sûrement.

Exercice 1 Réciproque du théorème d'arrêt
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires intégrables. On suppose que pour tout temps d'arrêt T adapté à (X_n) et borné, on a $\mathbf{E}X_T = X_0$. Montrer que (X_n) est une martingale.

Exercice 2 Attraction vers 0 et 1
Soit (U_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$, et $a \in [0,1]$. On définit par récurrence une suite de variables aléatoires (X_n) en posant $X_0 = a$, et pour $n \geqslant 0$

$$X_{n+1} = \begin{cases} \frac{X_n}{2} & \text{si } X_n \leqslant U_{n+1} \\ \frac{1+X_n}{2} & \text{si } X_n > U_{n+1}. \end{cases}$$

1. Montrer que (X_n) est une martingale qui converge p.s. vers une variable aléatoire Z à valeurs dans $[0,1]$.
2. Montrer que
$$\mathbf{E}(X_{n+1} - X_n)^2 = \frac{1}{4}\mathbf{E}X_n(1 - X_n)$$
3. Calculer $\mathbf{E}Z(1-Z)$ et déterminer la loi de Z.

Exercice 3 Martingale produit
Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. positives d'espérance 1. On pose

$$X_n = \prod_{k=1}^{n} Y_k.$$

1. Montrer que (X_n) est une martingale qui converge p.s. vers une variable aléatoire positive Z.
2. On suppose que Y_1 ne vaut pas constamment 1. Montrer que $Z = 0$.

Exercice 4 Transformation de martingale
Soit (X_n) une martingale et (H_n) un processus prévisible. On suppose que pour tout n, la variable H_n est bornée. On pose

$$(H \cdot X)_n = \sum_{k=1}^{n} H_k (X_k - X_{k-1}).$$

Montrer que $((H \cdot X)_n)$ est une martingale et interpréter le résultat. Peut-on écrire un énoncé similaire lorsqu'on suppose que (X_n) est une sous-martingale ?

Exercice 5 La prochaine carte sera rouge !
Vous prenez un jeu de 52 cartes supposé parfaitement mélangé. Vous retournez les cartes une à une, jusqu'à ce que, à un moment de votre choix qui peut dépendre de l'observation des cartes déjà retournées, vous déclariez “La prochaine carte sera rouge !”. Montrer que, quel que soit ce choix, votre probabilité de succès est invariablement de 1/2.

Remarque : *Si vous avez déjà retourné 51 cartes, vous êtes obligé de déclarer la dernière comme étant rouge (et ce même si vous savez à cet instant qu'elle est noire).*

Exercice 6 Distribution aléatoire du courrier

Monsieur McColl est un facteur peu consciencieux : chaque fois qu'il doit distribuer n colis à n personnes, il les distribue de manière aléatoire (selon la loi uniforme sur le groupe $\mathfrak{S}_n$), indépendemment de ce qu'il a fait les jours précédents.

Le premier jour on donne à M. McColl K colis à distribuer (à K personnes distinctes). Il les distribue au hasard, puis les personnes qui ont reçu un colis qui ne leur est pas destiné viennent le rapporter au bureau de poste. Le jour suivant, M. McColl distribue à nouveau les colis qui ont été rapportés. A nouveau les personnes qui n'ont pas reçu le bon colis le rapportent au bureau de poste, et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les paquets aient été distribués correctement.

Soit $T \in \mathbf{N}^*$ le nombre de jours qu'il faut avant que tous les colis soient bien distribués.

1. Pour $n \geqslant 2$, soit σ une permutation aléatoire choisie selon la loi uniforme sur le groupe $\mathfrak{S}_n$. Montrer que l'espérance et la variance du nombre de points fixes de σ sont égales à 1.
2. Soit A_n le nombre de colis correctement distribués le $n$ème jour, M_n le nombre de colis qui restent à distribuer après le $n$ème jour ($M_0 = K$) et $X_n = M_n + n$. Montrer que la suite $(X_{n\wedge T})$ est une martingale.
3. En déduire que $\mathbf{E}T = K$.
4. On pose $Y_n = X_n^2 + M_n$. Montrer que la suite $(Y_{n\wedge T})$ est une sur-martingale.
5. En déduire que $\mathbf{Var}\, T \leqslant K$.

Exercice 7 Urnes de Pólya

Une urne contient (au temps 0) $b > 0$ boules blanches et $v > 0$ boules vertes. On ajoute des boules dans l'urne dans répétant l'opération suivante

- On prend au hasard une boule dans l'urne parmi celles présentes au temps n.
- On replace cette boule dans l'urne, et on ajoute dans l'urne une boule de la même couleur que la boule tirée. On obtient la composition de l'urne au temps $n + 1$.

Soit X_n le nombre de boules blanches dans l'urne au temps n, et $Y_n = X_n/(n + b + v)$ la proportion de boules blanches au temps n.

1. Montrer que (Y_n) converge p.s. vers une variable aléatoire Z à valeurs dans $[0, 1]$.
2. Dans le cas où $b = v = 1$, montrer que pour tout n, X_n suit la loi uniforme sur $\{1, \dots, n + 1\}$, et en déduire la loi de Z.
3. On revient au cas général, et on fixe un entier $k \geqslant 1$. Montrer que la suite (M_n) définie par
$$M_n = \frac{X_n(X_n + 1)\cdots(X_n + k - 1)}{(n + b + v)(n + b + v + 1)\cdots(n + b + v + k - 1)}$$
est une martingale. Calculer les moments de Z, et en déduire que Z suit une loi Bêta de paramètres b et v, c'est-à-dire de densité sur $[0, 1]$
$$\frac{1}{B(b, v)} x^{b-1}(1 - x)^{v-1}\, \mathrm{d}x,$$
où
$$B(b, v) = \frac{\Gamma(b)\Gamma(v)}{\Gamma(b + v)}.$$