ENS Lyon Mathématiques
M1 Probabilités

Feuille d'exercices numéro 3
Autour du théorème de Perron–Frobenius

Dans toute la feuille on considère une matrice de transition Q irréductible sur un ensemble fini E que l'on identifie à $\{1,\ldots,p\}$.

Exercice 1

1. Montrer que toute valeur propre de Q est de module inférieur à 1.
2. Pourquoi Q admet-elle un vecteur propre à gauche pour la valeur propre 1 (i.e. v tel que $vQ=v$) ?
3. Soit $v \in \mathbf{R}^p$ tel que $vQ=v$. On note $|v|=(|v_1|,\ldots,|v_p|)$. Montrer que $|v|Q=|v|$.
4. Soit $v \in \mathbf{R}^p$ tel que $vQ=v$. Si $v \neq 0$, montrer que $v_i \neq 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$.
5. Soit $v \in \mathbf{R}^p$ tel que $vQ=v$. Montrer que toutes les coordonnées de v ont le même signe.
6. Montrer que l'espace propre $\{v \in \mathbf{R}^p \,:\, vQ=v\}$ est de dimension 1.
7. Montrer que 1 est valeur propre simple du polynôme caractéristique de Q.

Exercice 2 On suppose Q apériodique, soit μ la mesure de probabilité invariante. On va montrer de façon élémentaire que pour tous $i,j \in E$, on a

$$\lim_{n\to\infty} Q^n(i,j)=\mu(j)$$

et que cette convergence est exponentiellement rapide. Soit Q^∞ la matrice définie par $Q^\infty_{ij}=\mu(j)$.

1. Montrer qu'il existe un entier k et un réel $c \in]0,1[$ tel que la matrice $Q^k - cQ^\infty$ soit à coefficients positifs.
2. On note $||A||_\infty = \sup\{|A_{ij}| \,:\, 1 \leqslant i,j \leqslant p\}$. Montrer que pour tout entier l,
$$\|Q^{kl}-Q^\infty\|_\infty = \|(Q^k-Q^\infty)^l\|_\infty \leqslant (1-c)^l.$$
3. Montrer que pour tout entier n, $\|Q^n - Q^\infty\|_\infty \leqslant (1-c)^{\lfloor n/k \rfloor}$.

Exercice 3 Soit (X_n) la marche aléatoire paresseuse sur $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ définie par

$$X_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n \mod p$$

où les (ξ_i) sont i.i.d. de loi uniforme sur $\{-1,0,1\}$. En suivant le principe de l'exercice 2, expliciter des constantes C_p et $\varepsilon_p \in]0,1[$ telles que, pour tout entier n et $i \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$,

$$\left|\mathbb{P}(X_n=i)-\frac{1}{p}\right| \leqslant C_p(1-\varepsilon_p)^n.$$

Cela reste-t-il vrai pour la marche aléatoire usuelle (non paresseuse) sur $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$?

Exercice 4

1. On suppose Q apériodique. Montrer que si $\lambda \neq 1$ est une valeur propre complexe de Q, alors $|\lambda|<1$.
2. On suppose que la période de Q est $q>1$. Montrer que toute racine q-ième de l'unité est valeur propre de Q.

Exercice 5 On suppose Q apériodique et on note μ et Q^∞ comme à l'exercice 3. Soit $\rho<1$ le maximum des modules des valeurs propres de Q différentes de 1. Montrer que pour tout $\eta>0$, il existe une constante C_η telle que

$$\|Q^n - Q^\infty\|_\infty \leqslant C_\eta(\rho+\eta)^n.$$

Indication : *On rappelle la formule de Gelfand* $\rho(A)=\lim_{n\to\infty}\|A^n\|^{1/n}$.

Exercice 6 Calculer explicitement le spectre de la matrice de transition de l'exercice 3 (on remarquera que ses vecteurs propres sont de la forme $(\omega,\cdots,\omega^{p-1},\omega^p)$ où ω est une racine $p$ème de l'unité). Montrer que la méthode de l'exercice 5 donne une bien meilleure vitesse de convergence que celle de l'exercice 2 si p est grand.