ENS Lyon Mathématiques
M1 Probabilités

Feuille d'exercices numéro 4
Temps d'arrêt, irréducibilité, mesures invariantes.

Exercice 1 On considère un espace de probabilité muni d'une filtration.

1. Soient S et T deux temps d'arrêt. Montrer que $S \wedge T = \min(S, T)$ et $S \vee T = \max(S, T)$ sont aussi des temps d'arrêt.
2. Soient S et T deux temps d'arrêt. Est-ce que $S + T$ est un temps d'arrêt ?
3. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires telle que, pour tout n, Y_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable. Soit T un temps d'arrêt fini presque sûrement. Montrer que $Y_T \in \mathcal{F}_T$.
4. Soient S et T deux temps d'arrêt tels que $S \leqslant T$. Montrer que $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

Exercice 2 Identité de Wald
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. dans L^1, et T un temps d'arrêt pour la suite (X_n) tel que $\mathbb{E}\, T < \infty$. Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{T} X_i\right] = \mathbb{E}\, T\ \mathbb{E}\, X_1.$$

Indication : *traiter d'abord le cas où les variables sont positives.*

Exercice 3 On ajoute des nombres dans $[0, 1]$ jusqu'à dépasser 1.
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour $n \geqslant 1$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Soit le temps d'arrêt $T = \inf\{n \text{ t.q. } S_n > 1\}$. Montrer que

1. $\mathbb{P}(T > n) = 1/n!$,
2. $\mathbb{E}\, T = e$,
3. $\mathbb{E}\, S_T = e/2$.

Exercice 4 Dernier sommet visité par la marche aléatoire sur $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$
Soit $p \geqslant 1$, G le graphe cyclique à p sommets et x un sommet de G. On considère la marche aléatoire (X_n) sur G, issue de x.

1. Montrer que $T = \inf\{n : \operatorname{card}\{X_0, \cdots, X_n\} = p\}$ est un temps d'arrêt pour la suite (X_n).
2. Montrer que T est fini presque sûrement.
3. Déterminer la loi de X_T.

Exercice 5
Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbf{Z}$, et $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi μ. Soit $x \in \mathbf{N}$. On définit par récurrence, une suite $(X_n)_{n\geqslant 1=0}$ en posant $X_0 = x$ et, pour $n \in \mathbf{N}$,

$$X_{n+1} = (X_n + Z_n)^+,$$

où l'on a noté $t^+ = \max(t, 0)$.

1. Expliciter une matrice de transition Q sur $\mathbf{N}$ telle que (X_n) soit une chaîne de Markov de matrice de trantision Q.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur μ pour que cette chaîne de Markov soit irréductible.

Exercice 6
Soit $r > 1$ un entier. On répartit r boules blanches et r boules noires dans deux urnes, avec la contrainte que chaque urne contient r boules. A chaque instant, on choisit une boule dans chaque urne et on les échange, tous les tirages étant supposés indépendants. Montrer que l'état du système à l'instant n peut être décrit par une chaîne de Markov. Est-elle irrédutible ? Apériodique ? Calculer sa mesure de probabilité invariante.

Exercice 7

On construit par récurrence une suite de polygones convexes (P_n) de la manière suivante : on choisit au hasard deux côtés distincts du polygone P_{n-1} (selon la loi uniforme) et on relie leurs milieux par une arête. Le polgone P_n est l'un deux polygones ainsi délimités (chacun est choisi avec probabilité 1/2). Soit (X_n) le nombre de côtés du polygone P_n, on pose $Y_n = X_n - 3$. Montrer que (Y_n) est une chaîne de Markov irréductible (pour une matrice de transition à préciser) et que la loi de Poisson de paramètre 1 est la mesure de probabilité invariante pour cette chaîne.

Exercice 8

On considère une cavité dans laquelle des particules physiques entrent puis se désintègrent au bout d'une certaine durée. On suppose qu'à l'instant n, un nombre Y_n de particules entrent dans la cavité, où Y_n sont des variables aléatoires i.i.d. de loi de Poisson de paramètre λ. On considère que la durée de vie de chaque particule suit une variable aléatoire géométrique de paramètre p, et que toutes ces variables aléatoires sont indépendantes. Soit X_n le nombre de particules dans la chambre à l'instant n. Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov et calculer sa mesure invariante.