ENS Lyon
M1 Probabilités

Mathématiques

Feuille d'exercices numéro 6

Chaînes de Markov : exercices supplémentaires

Exercice 1 Les temps d'atteinte comme une distance

Soit une matrice de transition sur un espace d'états S, et (X_n) la chaîne de Markov associée, définie sur son espace canonique. On suppose que la chaîne de Markov est irréductible et récurrente positive. Le temps d'atteinte d'un état $x \in S$ est noté $T_x = \inf\{n \geqslant 0 \text{ t.q. } X_n = x\}$. Pour x, y dans S, on définit

$$d(x,y) = \mathbf{E}_x T_y + \mathbf{E}_y T_x$$

Montrer que d est une distance sur S, c'est-à-dire qu'elle vérifie les axiomes suivants pour $x, y, z \in S$

1. $d(x,y) < +\infty$,
2. $x = y \iff d(x,y) = 0$,
3. $d(x,y) = d(y,x)$,
4. $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$

Exercice 2 Temps de mélange

Soit Q une matrice de transition irréductible et apériodique sur un ensemble fini S. On note π l'unique mesure de probabilité invariante. Pour $n \in \mathbf{N}$, on introduit

$$d(n) = \max_{x \in S} \|Q^n(x,\cdot) - \pi\|_{TV} \quad \text{et} \quad \overline{d}(n) = \max_{x,y \in S} \|Q^n(x,\cdot) - Q^n(y,\cdot)\|_{TV}.$$

1. Montrer les inégalités
$$d(n) \leqslant \overline{d}(n) \leqslant 2d(n).$$
2. Montrer que $\overline{d}$ est une fonction sous-multiplicative
$$\overline{d}(m+n) \leqslant \overline{d}(m)\overline{d}(n).$$
3. Montrer que d et $\overline{d}$ sont des fonctions décroissantes.
4. Soit $\varepsilon > 0$. On introduit $t_{mix}(\varepsilon) = \min\{t : d(t) \leqslant \varepsilon\}$. Montrer que
$$t_{mix}(\varepsilon) \leqslant \lceil \log_2(\varepsilon^{-1}) \rceil t_{mix}(1/4).$$
On appelle $t_{mix}(1/4)$ le temps de mélange de la chaîne de Markov associée à Q.

Exercice 3

Soit $(U_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables i.i.d telle que $\mathbf{P}(U_1 = -1) = \mathbf{P}(U_1 = 1) = 1/2$. On définit un processus $(X_k)_{k \geqslant 0}$ à valeurs dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ par récurrence par $X_0 = X_1 = 0$ et, pour $k \geqslant 1$,

$$X_{k+1} = 2X_k - X_{k-1} + U_k.$$

1. Calculer l'espérance de $T := \inf\{k > 0 : X_k = X_{k+1} = 0\}$.
2. Si n est impair, montrer que la loi de X_k converge vers la mesure de probabilité uniforme sur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.
3. Si n est pair, montrer que X_{4k} et X_{4k+1} convergent en loi vers la mesure uniforme sur les nombres pairs de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ tandis que X_{4k+2} et X_{4k+3} convergent en loi vers la mesure uniforme sur les nombres impairs.

Indication : *Montrer que le processus défini par $Y_k = (X_k, X_{k+1})$ est une chaîne de Markov irréductible, déterminer sa mesure de probabilité invariante et étudier sa période.*