Feuille d'exercices numéro 6
Martingales

Dans toute la feuille, on considère une filtration $(\mathcal{F}_n)$ et les martingales, temps d'arrêt, etc. sont relatifs à cette filtration.

Exercice 1 Théorème d'arrêt élémentaire

Soit (M_n) une martingale et T un temps d'arrêt borné (au sens où $\mathbf{P}(T \leqslant N) = 1$ pour un entier N). Montrer que $\mathbf{E}M_T = \mathbf{E}M_0$. Donner un exemple de temps d'arrêt fini presque sûrement, mais non borné, pour lequel la conclusion est fausse.

Exercice 2 Ruine du joueur

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ la marche aléatoire simple sur $\mathbf{Z}$ partant de $a > 0$. Pour $b > a$, on définit les temps d'atteinte $T_0 := \inf\{n \geq 0, X_n = 0\}$ et $T_b := \inf\{n \geq 0, X_n = b\}$, que l'on sait être finis presque sûrement.

1. Calculer l'espérance de $X_{n\wedge T_0 \wedge T_b}$, puis celle de $X_{T_0\wedge T_b}$.
2. En déduire la probabilité que T_b soit plus petit que T_0 (probabilité que le joueur ait atteint la fortune b sans s'être ruiné).

Exercice 3 Espérance du temps de retour en 0 pour la marche aléatoire biaisée vers l'origine

Soit (X_n) la marche aléatoire sur $\mathbf{Z}$ biaisée, qui saute de $+1$ avec probabilité $p < 1/2$, de -1 avec probabilité $1 - p$. On suppose $X_0 = 1$ et on note T le temps d'atteinte de 0.

1. Pourquoi T est fini p.s. ?
2. En introduisant une martingale appropriée, calculer l'espérance de
$$X_{n\wedge T} + (1 - 2p)(n \wedge T).$$
3. En déduire dans un premier temps que l'espérance de T est finie, puis la calculer.

Exercice 4 Décomposition de Doob

Soit (X_n) un processus $(\mathcal{F}_n)$-adapté, avec les X_n intégrables. On dit qu'un processus (Z_n) est prévisible si pour tout n, Z_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable.

1. Montrer qu'il existe une unique décomposition (appelée décomposition de Doob)
$$X_n = X_0 + Y_n + Z_n \qquad \forall n \geq 0,$$
où (Y_n) est une martingale, (Z_n) un processus prévisible, et $Y_0 = Z_0 = 0$. On pourra commencer par montrer que (Z_n) doit nécessairement vérifier la relation de récurrence
$$Z_{n+1} = Z_n + \mathbf{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] - X_n.$$
2. Montrer que (X_n) est une sous-martingale si et seulement (Z_n) est croissant.
3. Expliciter la décomposition de Doob dans le cas où $X_n = (\sum_{k=1}^n U_k)^2$, avec les U_k des v.a. i.i.d de carré intégrable et centrées.

Exercice 5

Donner un exemple de martingale (X_n) qui converge presque sûrement vers $-\infty$.

Indication : on pourra prendre $X_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, où (ξ_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes (mais non identiquement distribuées) à déterminer.

Exercice 6 Une martingale qui converge en probabilité, mais pas presque sûrement

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. indépdendantes vérifiant

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité } 1/2n \\ 0 & \text{avec probabilité } 1 - 1/n \\ -1 & \text{avec probabilité } 1/2n. \end{cases}$$

et $(\mathcal{F}_n)$ la filtration associée. On définit une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ en posant $Y_1 = X_1$, et pour $n \geqslant 2$,

$$Y_n = \begin{cases} X_n & \text{si } Y_{n-1} = 0, \\ nY_{n-1}|X_n| & \text{si } Y_{n-1} \neq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que (Y_n) est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$..
2. Montrer que (Y_n) converge vers 0 en probabilité.
3. Montrer que (Y_n) ne converge pas vers 0 presque sûrement.