ENS Lyon — Mathématiques

M1 Probabilités

Feuille d'exercices numéro 7

Couplages

Exercice 1 Convergence à l'équilibre des chaînes de Markov

On considère une chaîne de Markov de matrice de transition Q sur un espace d'états fini ou dénombrable E. On suppose que la chaîne est irréductible, apériodique et récurrente positive, et on note π la mesure de probabilité invariante. On souhaite montrer qu'il y a convergence vers l'équilibre, c'est-à-dire que pour tout $x \in E$,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{y\in E} |Q^n(x,y) - \pi(y)| = 0.$$

On définit une matrice de transition R sur $E \times E$ par la formule

$$R((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = Q(x_1,y_1)Q(x_2,y_2).$$

1. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition R et de loi initiale $\delta_x \otimes \pi$. On note $X_n = (X_n^{(1)}, X_n^{(2)}) \in E \times E$. Que peut-on dire des processus $(X_n^{(1)})_{n\geqslant 0}$ et $(X_n^{(2)})_{n\geqslant 0}$?
2. Montrer que R est irréductible.
3. Montrer que R admet une mesure de probabilité invariante.
4. En déduire que R est récurrente positive.
5. On introduit le temps d'arrêt $T = \inf\{n \text{ t.q. } X_n^{(1)} = X_n^{(2)}\}$. Montrer que T est presque sûrement fini.
6. Montrer que pour tous $n \in \mathbf{N}$ et $y \in E$, on a
$$\mathbf{P}(X_n^{(1)} = y, T \leqslant n) = \mathbf{P}(X_n^{(2)} = y, T \leqslant n)$$
7. Conclure.
8. Est-il vrai que
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} \sum_{y\in E} |Q^n(x,y) - \pi(y)| = 0 \quad ?$$

Exercice 2 Demain n'est pas trop différent d'aujourd'hui (quand on est vieux et paresseux)

Soit Q une matrice de transition irréductible sur un ensemble E fini ou dénombrable, et $P = \frac{1}{2}(Q+\mathrm{Id})$ la version paresseuse de Q. On veut montrer par un argument de couplage que pour tous $x \in E$ et $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\left\| P^n(x,\cdot) - P^{n+1}(x,\cdot) \right\|_{TV} \leqslant \frac{C}{\sqrt{n}}$$

pour une cosntante C.

1. Soit $(W_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. avec $\mathbf{P}(W_1 = 0) = P(W_1 = 1) = 1/2$, et $\tau = \inf\{n > 0 \text{ t.q. } W_1 + \cdots + W_n = (1 - W_2) + \cdots + (1 - W_n)\}$. On définit une suite (W_n') par
$$W_n' = \begin{cases} W_{n+1} & \text{si } n > \tau \\ 1 - W_{n+1} & \text{si } n \leqslant \tau \end{cases}.$$
Montrer que (W_n') a même loi que (W_n).
2. Soit (Z_n) une chaîne de Markov de matrice de transition Q, issue de x. On pose $X_n = Z_{W_1+\cdots+W_n}$ et $X_n' = Z_{W_1'+\cdots+W_n'}$. Vérifier que (X_n) et (Y_n) sont des chaînes de Markov de matrice de transition P, et que $\mathbf{P}(X_n' \neq X_{n+1}) \leqslant \mathbf{P}(\tau \geqslant n)$.
3. Conclure. On rappelle le résultat suivant, conséquence du théorème du scrutin : si (S_n) est une marche aléatoire simple sur $\mathbf{Z}$ issue de 0 et T_0 désigne le temps de retour en 0, alors $\mathbf{P}(T_0 > 2n) = \mathbf{P}(S_{2n} = 0)$.