

Devoir maison numéro 1

La loi forte des grands nombres L^1 (d'après Etemadi).

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. L^1 . On pose

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

et on veut montrer que la suite S_n/n converge presque sûrement vers $\mathbf{E}X_1$. On note $Y_n = X_n \mathbf{1}_{|X_n| \leq n}$ et on pose $T_n = Y_1 + \dots + Y_n$.

1. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(|X_k| > k) \leq \mathbf{E}|X_1|.$$

2. Montrer que

$$\mathbf{P}(X_k \neq Y_k \text{ pour une infinité de } k \in \mathbf{N}) = 0.$$

3. En déduire que si T_n/n converge presque sûrement vers $\mathbf{E}X_1$, il en est de même de S_n/n .

4. Montrer que pour tout réel $y > 0$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \mathbf{1}_{k > y} \leq 2/y.$$

5. Montrer que

$$\mathbf{E}Y_k^2 = \int_0^{\infty} 2y \mathbf{P}(|Y_k| \geq y) dy.$$

6. En déduire que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \mathbf{Var}(Y_k) \leq 4\mathbf{E}|X_1|.$$

7. On se donne un réel $\alpha > 1$, et on note $k(n) = \lfloor \alpha^n \rfloor$. En estimant

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(|T_{k(n)} - \mathbf{E}T_{k(n)}| \geq \varepsilon k(n))$$

en fonction de $\mathbf{Var}(Y_m)$, montrer que, presque sûrement,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_{k(n)} - \mathbf{E}T_{k(n)}}{k(n)} = 0.$$

8. En déduire que $\frac{1}{k(n)} T_{k(n)}$ converge presque sûrement vers $\mathbf{E}X_1$.

9. Dans cette question, on suppose que les variables aléatoires (X_n) sont positives ; c'est donc également le cas des variables aléatoires (Y_n) . En faisant un encadrement judicieux, montrer que, presque sûrement,

$$\alpha^{-1} \mathbf{E}X_1 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{n} \leq \alpha \mathbf{E}X_1.$$

En déduire que, presque sûrement,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{n} = \mathbf{E}X_1.$$

10. Conclure également dans le cas où l'on ne suppose plus que les variables aléatoires (X_n) sont positives.

11. On a en fait utilisé une hypothèse plus faible que «i.i.d.» ; laquelle ?