Devoir maison numéro 2

Convergence des martingales dans L^p.

Le but du devoir est de montrer le théorème suivant

Théorème. *Soit $p \in]1, +\infty[$, et soit (Z_n) une martingale bornée dans L^p, c'est-à-dire telle que*

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{E}|Z_n|^p < +\infty.$$

Alors (Z_n) converge presque sûrement vers une variable aléatoire Z, et la convergenve a lieu aussi dans L^p, c'est-à-dire

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{E}|Z_n - Z|^p = 0.$$

Partie A

Dans cette partie (X_n) désigne une sous-martingale positive pour une filtration $(\mathcal{F}_n)$.

1. Soient S, T deux temps d'arrêt bornés vérifiant $S \leqslant T$. Montrer que
$$\mathbf{E}X_S \leqslant \mathbf{E}X_T.$$
Indication : *On pourra introduire $H_n = \mathbf{1}_{\{S < n \leqslant T\}}$ et considérer $(H \cdot X)_n$*
2. Pour $t > 0$, on pose $\tau = \inf\{k \in \mathbf{N} \text{ t.q. } X_k \geqslant t\}$. Montrer que τ est un temps d'arrêt.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$\mathbf{E}X_{\tau \wedge n} \leqslant \mathbf{E}X_n.$$
4. Montrer à l'aide de la question précédente que
$$t\mathbf{P}(\tau \leqslant n) \leqslant \mathbf{E}\left(X_n \mathbf{1}_{\{\tau \leqslant n\}}\right).$$
5. On pose $\tilde{X}_n = \sup_{0 \leqslant k \leqslant n} X_k$. Montrer que pour tous $t > 0, n \in \mathbf{N}$ et $p > 1$,
$$t^{p-1}\mathbf{P}(\tilde{X}_n \geqslant t) \leqslant t^{p-2}\mathbf{E}[X_n \mathbf{1}_{\{\tilde{X}_n \geqslant t\}}].$$
En intégrant cette inégalité pour t variant entre 0 et $+\infty$, obtenir que
$$\frac{1}{p}\mathbf{E}\tilde{X}_n^p \leqslant \frac{1}{p-1}\mathbf{E}[X_n \tilde{X}_n^{p-1}].$$
6. En utilisant judicieusement l'inégalité de Hölder, en déduire que
$$\mathbf{E}\tilde{X}_n^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbf{E}X_n^p.$$

Partie B

Dans cette partie on démontre le théorème. Soit (Z_n) une martingale bornée dans L^p, pour $p > 1$.

1. Montrer que (Z_n) converge presque sûrement vers une variable aléatoire Z qui vérifie $\mathbf{E}|Z|^p < +\infty$.
2. Montrer (en utilisant la partie A et le théorème de convergence dominée) que
$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{E}|Z_n - Z|^p = 0.$$