Université Claude Bernard — Mathématiques

M1 Probabilités

Examen final du 25 mai 2011
Durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé.

On rappelle qu'une variable aléatoire de loi $N(0,1)$ a pour densité la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$$

et qu'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ a pour densité la fonction

$$x \mapsto \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x \geqslant 0}.$$

Exercice 1 (Questions de compréhension du cours)

1. Soit X une variable aléatoire positive. Exprimer $\mathbf{E}\, X$ en fonction de la fonction $t \mapsto \mathbf{P}(X > t)$.
2. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires qui converge faiblement vers X, et (Y_n) une suite de variables aléatoires qui converge faiblement vers Y. On suppose que pour tout n, X_n et Y_n sont indépendantes, et que X et Y sont indépendantes. Montrer que la suite $(X_n + Y_n)$ converge faiblement vers $X + Y$.

Exercice 2

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $N(0,1)$. Montrer que la variable aléatoire $X^2 + Y^2$ suit une loi exponentielle dont on déterminera le paramètre.

Exercice 3

Soit (ε_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. vérifiant $\mathbf{P}(\varepsilon_n = 1) = \mathbf{P}(\varepsilon_n = -1) = 1/2$. On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{k}.$$

1. Calculer l'espérance et la variance de S_n.
2. En invoquant un des théorèmes de convergence des martingales, montrer que la suite (S_n) converge presque sûrement vers une variable aléatoire Z.
3. Existe-t-il une constante $M \in \mathbf{R}^+$ telle que $\mathbf{P}(|Z| < M) = 1$?

Exercice 4

Soit $(p_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de nombres réels vérifiant $0 < p_k < 1$ et $\sum p_k = 1$, et $(q_k)_{k \geqslant 1}$ une autre suite de nombres réels vérifiant $0 < q_k < 1$. On considère la matrice de transition Q sur $\mathbf{N}$ définie par

$$\begin{cases} Q(0,k) = p_k & \text{si } k \geqslant 1 \\ Q(k,0) = q_k & \text{si } k \geqslant 1 \\ Q(k,k) = 1 - q_k & \text{si } k \geqslant 1 \\ Q(i,j) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que la chaîne de Markov associée est irréductible.
2. Soit $\tau_0 = \inf\{n > 0 \text{ t.q. } X_n = 0\}$ le temps de retour en 0. Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, on a $\mathbf{P}_k(\tau_0 < +\infty) = 1$. En déduire que $\mathbf{P}_0(\tau_0 < +\infty) = 1$, puis que tous les états sont récurrents.
3. Calculer les mesures invariantes de cette chaîne de Markov. A quelle condition a-t-on, $\mathbf{P}_0$-p.s.,

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \operatorname{card}\{n \in \{1, \dots, N\} \text{ t.q. } X_n = 0\} = 0 \quad ?$$

Exercice 5

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, 3\}$, et $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. On définit τ comme l'instant de la première apparition de la séquence « $1 \cdot 2$ » dans la suite (X_n) :

$$\tau = \inf\{n \geqslant 2 \text{ t.q. } X_{n-1} = 1 \text{ et } X_n = 2\}.$$

1. Montrer que τ est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.
2. Montrer que $\mathbf{P}(\tau < +\infty) = 1$.
3. Pour $n \in \mathbf{N}$, on définit (Y_n) par

$$Y_n = 9 \sum_{k=2}^{n} \mathbf{1}_{\{X_k=2, X_{k-1}=1\}} + 3 \cdot \mathbf{1}_{\{X_n=1\}},$$

   et $M_n = Y_n - n$. Montrer que (M_n) est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$. En déduire que $\mathbf{E}\, M_{\tau \wedge n} = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
4. Montrer que l'on a $\mathbf{E}\, Y_\tau = \mathbf{E}\, \tau$ en en déduire que $\mathbf{E}\, \tau = 9$.
5. On définit de manière similaire τ' comme l'instant de la première apparition de la séquence « $1 \cdot 1$ » dans la suite (X_n) :

$$\tau' = \inf\{n \in \mathbf{N} \text{ t.q. } X_{n-1} = 1 \text{ et } X_n = 1\}.$$

   Adapter l'argument précédent pour calculer $\mathbf{E}\, \tau'$.
6. Calculer $\mathbf{P}(\tau > \tau')$.