Feuille d'exercices numéro 1

Le formalisme des probabilités

Exercice 1 Fonctions de répartition

Soit X une variable aléatoire et F sa fonction de répartition.

1. Montrer que
   (a) F est croissante.
   (b) F a pour limites 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$.
   (c) F est continue à droite.
2. Montrer que F admet une limite à gauche en tout point. A quelle condition est-ce que la fonction F est continue en un point x donné ? Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de F est au plus dénombrable.
3. Réciproquement, soit $F : \mathbf{R} \to [0,1]$ une fonction vérifiant les conditions (a),(b) et (c) ci-dessus. Montrer qu'il existe une variable aléatoire X dont F est la fonction de répartition.
   Indication : *on peut définir X sur $(]0,1[, \text{Lebesgue})$ en posant $X(\omega) = \sup\{y : F(y) < \omega\}$.*

Exercice 2 Lemme de Doob–Dynkin

Soit $X : \Omega \to \mathbf{R}$ une variable aléatoire, et $Y : \Omega \to \mathbf{R}$ une fonction $\sigma(X)$-mesurable. Montrer qu'il existe une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ borélienne telle que $Y = f(X)$.

Indication : *on pourra commencer par le cas où Y est étagée et utiliser le fait que toute fonction mesurable positive est limite croissante d'une suite de fonctions étagées.*

Exercice 3 Autour de l'inégalité de Markov

1. Fixons $0 < b \leqslant a$. Montrer qu'il existe une variable aléatoire positive X telle que $\mathbf{E}X = b$ et $a\mathbf{P}(X \geqslant a) = \mathbf{E}X$.
2. Soit X une variable aléatoire positive L^1. Montrer que

$$\lim_{a\to\infty} a\mathbf{P}(X \geqslant a) = 0.$$

Exercice 4 Une minoration qui n'existe pas

Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il n'existe pas de réel $p > 0$ tel que $\mathbf{P}(|X| > \varepsilon) \geqslant p$ pour toute variable aléatoire X d'espérance 0 et de variance 1.

Exercice 5 Une minoration qui existe

Soit Y une variable aléatoire positive L^2. Montrer que

$$\mathbf{P}(Y > 0) \geqslant \frac{(\mathbf{E}Y)^2}{\mathbf{E}(Y^2)}.$$

Indication : *Appliquer l'inégalité de Cauchy–Schwarz à $Y\mathbf{1}_{\{Y>0\}}$.*

Exercice 6 Formule d'inclusion-exclusion

Soit $A_1, \ldots, A_n$ des événements et $A = \bigcup A_i$. Exprimer $\mathbf{1}_A$ en fonction de $\mathbf{1}_{A_i}$. En déduire la formule suivante :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbf{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbf{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n-1}\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right).$$

Application : soit σ une permutation aléatoire de $\{1, \ldots, n\}$ choisie selon la loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$. Estimer (pour $n \to \infty$) la probabilité que σ admette un point fixe.

Exercice 7 Moments d'une variable exponentielle

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. Calculer $\mathbf{E}X^k$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Exercice 8 Incontournable

Calculer l'espérance et la variance des lois usuelles.

Exercice 9 Lois gamma

Pour des paramètres $\alpha, \lambda > 0$, on appelle loi gamma(α, λ) la loi dont la densité est

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\alpha x^{\alpha-1} \exp(-\lambda x) \mathbf{1}_{\{x>0\}},$$

où $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \exp(-x) dx$. Si $X \sim$ gamma(α, λ) et $Y \sim$ gamma(β, λ) sont deux variables aléatoires indépendantes, montrer que $X + Y$ suit une loi gamma$(\alpha + \beta, \lambda)$. En déduire que lorsque $n \in \mathbf{N}^*$, la loi gamma(n, λ) est la loi de la somme de n variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice 10 Queue de la distribution gaussienne

Soit G une variable aléatoire de loi $N(0, 1)$. Montrer que pour $x > 0$, on a les inégalités

$$(x^{-1} - x^{-3}) \exp(-x^2/2) \leqslant \int_x^\infty \exp(-y^2/2) \leqslant x^{-1} \exp(-x^2/2)$$

en en déduire un équivalent de $\mathbf{P}(G > x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 11 Lois de Poisson

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres λ et μ. Quelle est la loi de $X + Y$?

Exercice 12 Des variables aléatoires non corrélées

Soit $\Omega = [0, 1]$ muni de la tribu des boréliens et de la mesure de Lebesgue. On définit une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geqslant 1}$ par

$$X_n(\omega) = \sin(2\pi n \omega).$$

Montrer que ces variables aléatoires sont non-corrélées et de même loi, mais que pour tous $i, j \in \mathbf{N}^*$, X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

Exercice 13 Indépendance n à n ...

Pour tout n, trouver $n+1$ variables aléatoires à valeurs dans $\{-1, 1\}$, qui ne soient pas indépendantes, mais telles que n'importe quel sous-ensemble de n d'entre elles soit n variables aléatoires indépendantes.

Indication : *considérer des produits de variables aléatoires indépendantes.*

Exercice 14 Variables aléatoires dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$

Soit $p \geqslant 3$ un nombre premier et X, Y deux variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur le groupe $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Pour $0 \leqslant n \leqslant p - 1$, on pose $Z_n = X + nY$ (modulo p). Montrer que les variables aléatoires $(Z_0, \ldots, Z_{p-1})$ sont deux à deux indépendantes, mais que la donnée de deux de ces variables permet de reconstruire toutes les autres.

Exercice 15 La mesure de Lebesgue vaut cher : une infinité de pièces de monnaie !

1. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre 1/2. Quelle est la loi de la variable aléatoire
$$Y = \sum_{n=1}^\infty \frac{X_n}{2^n} \quad ?$$
2. Réciproquement, soit $\Omega = [0, 1]$ muni de la tribu des boréliens et de la mesure de Lebesgue. On définit une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k \geqslant 1}$ sur (Ω, λ) en posant
$$X_k(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lfloor 2^k \omega \rfloor \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Montrer que les variables $(X_k)_{k \geqslant 1}$ sont i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre 1/2.
3. En déduire qu'il est possible de définir sur $([0, 1], \lambda)$ une infinité de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$.
Indication : $\mathbf{N}$ *et* $\mathbf{N}^2$ *sont en bijection.*
4. En déduire que, étant donnée une suite (μ_n) de mesures de probabilité sur $\mathbf{R}$, il est possible de définir sur $([0, 1], \lambda)$ une suite (X_n) de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout n, X_n ait pour loi μ_n.