Feuille d'exercices numéro 10

Chaînes de Markov : mesures invariantes

Exercice 1 On considère la chaîne de Markov sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ donnée par la matrice de transition suivante.

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Montrer que cette chaîne est irréductible récurrente.
2. Calculer la mesure de probabilité invariante.

Exercice 2 Marche aléatoire sur un graphe

Un graphe fini est donné par un couple (S, A), où S est un ensemble fini (l'ensemble des sommets du graphe) et A (l'ensemble des arêtes du graphe) est un sous-ensemble de $\mathscr{P}_2(S)$ (ici $\mathscr{P}_2(S)$ désigne l'ensemble des parties de S contenant exactement deux éléments).

Le degré d'un sommet $s \in S$ est défini comme le nombre d'arêtes auquel il appartient

$$d_s = \text{card}\{a \in A \text{ t.q. } s \in a\}.$$

On définit une matrice de transition P sur l'ensemble d'états S en posant

$$P(s,t) = \begin{cases} 1/d_s & \text{si } \{s,t\} \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On suppose que la chaîne de Markov associée est irréductible. Quelle est la mesure de probabilité invariante μ ? (**Indication** : exprimer $\mu(s)$ en fonction de d_s.)

Application : une pièce d'échecs part du coin d'un échiquier (de 8×8 cases) et se déplace au hasard (à chaque étape, elle effectue un mouvement choisi selon la loi uniforme sur l'ensemble des mouvements possibles). Quel est le nombre moyen de déplacements avant qu'elle retourne à sa case de départ

1. si la pièce est un roi ?
2. si la pièce est une reine ?
3. si la pièce est un cavalier ?
4. si la pièce est un fou ?
5. si la pièce est une tour ?

Exercice 3

On construit par récurrence une suite de polygones convexes (P_n) de la manière suivante : on choisit au hasard deux côtés distincts du polygone P_{n-1} (selon la loi uniforme) et on relie leurs milieux par une arête. Le polgone P_n est l'un deux polygones ainsi délimités (chacun est choisi avec probabilité 1/2). Soit (X_n) le nombre de côtés du polygone P_n, on pose $Y_n = X_n - 3$. Montrer que (Y_n) est une chaîne de Markov irréductible (pour une matrice de transition à préciser) et que la loi de Poisson de paramètre 1 est la mesure de probabilité invariante pour cette chaîne.

Exercice 4

On considère une cavité dans laquelle des particules physiques entrent puis se désintègrent au bout d'une certaine durée. On suppose qu'à l'instant n, un nombre Y_n de particules entrent dans la cavité, où Y_n sont des variables aléatoires i.i.d. de loi de Poisson de paramètre λ. On considère que la durée de vie de chaque particule suit une variable aléatoire géométrique de paramètre p, et que toutes ces variables aléatoires sont indépendantes. Soit X_n le nombre de particules dans la chambre à l'instant n. Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov et calculer sa mesure invariante.