Feuille d'exercices numéro 2

Lois des grands nombres et lemmes de Borel–Cantelli

Exercice 1 Théorème d'approximation de Weierstrass.

On va donner une preuve probabiliste du théorème de Weierstrass : toute fonction continue $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ est la limite uniforme d'une suite de polynômes. Pour cela, on définit la suite (f_n) des polynômes de Bernstein associés à f en posant pour $p \in [0,1]$,

$$f_n(p) = \mathbf{E} f\left(\frac{X_{n,p}}{n}\right),$$

où $X_{n,p}$ est une variable aléatoire de loi binomiale $B(n,p)$.

1. Vérifier que f_n est un polynôme.
2. Soit $\varepsilon > 0$. On rappelle qu'une fonction continue sur un compact est uniformément continue :
$$\exists \delta > 0 \text{ t.q. } |x-y| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$
Montrer que, en posant $M = \sup |f|$, pour tout $0 \leqslant p \leqslant 1$,
$$|f_n(p) - f(p)| \leqslant \mathbf{E}\left|f\left(\frac{X_{n,p}}{n}\right) - f(p)\right| \leqslant \varepsilon + 2M\mathbf{P}\left(\left|\frac{X_{n,p}}{n} - p\right| > \delta\right).$$
3. Montrer que pour tout $\delta > 0$, $\mathbf{P}\left(\left|\frac{X_{n,p}}{n} - p\right| > \delta\right) \leqslant \frac{1}{4n\delta^2}$.
4. Conclure.

Exercice 2 Que devient la loi des grands nombres quand $\mathbf{E}|X| = \infty$?

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. On suppose que $\mathbf{E}|X_1| = +\infty$.

1. Montrer que $\mathbf{E}|X_1| = \int_0^\infty \mathbf{P}(|X_1| \geqslant t)dt$ et en déduire que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(|X_1| \geqslant n) = +\infty.$$
2. Montrer à l'aide du lemme de Borel–Cantelli que l'évenement $A =$ « $|X_n| \geqslant n$ une infinité de fois » a probabilité 1.
3. En déduire que l'événement « La suite $\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ converge » a probabilité 0.

Exercice 3 Records.

Combien de fois par siècle entend-on dire : « Cet été, on a battu le record de température à Lyon » ? Pour répondre à cette question, soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. On suppose que la loi de X_1 est une loi continue (i.e. elle admet une densité) ; X_n représente la température maximale au cours de l'année n.

1. Montrer que l'évenement $A =$ « Il existe des entiers $i \neq j$ tels que $X_i = X_j$ » a probabilité 0.
2. On fixe $n \in \mathbf{N}^*$. Pour $\omega \in \Omega \setminus A$, on définit $\sigma_n = \sigma_n(\omega)$ comme l'unique permutation $\sigma_n \in \mathfrak{S}_n$ telle que
$$X_{\sigma_n(1)} < X_{\sigma_n(2)} < \cdots < X_{\sigma_n(n)}.$$
Montrer que σ suit la loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$.
3. Soit A_n l'événement « le temps n est un temps de record », c'est-à-dire « Pour tout $k < n$, $X_k < X_n$ ». Montrer que les événements $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sont indépendants et que $\mathbf{P}(A_n) = 1/n$.
4. Montrer que, presque sûrement, il existe une infinité de temps de record.

Exercice 4 Convergences d'une suite de variables de Bernoulli

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, telles que X_n suive une loi de Bernoulli de paramètre p_n.

1. Montrer que (X_n) converge vers 0 en probabilité si et seulement si $\lim p_n = 0$.
2. Montrer que (X_n) converge vers 0 presque sûrement si et seulement si $\sum p_n < +\infty$.

Exercice 5 La convergence en probabilités est métrisable

Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des classes d'équivalence de variables aléatoires de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ dans $\mathbf{R}$ pour la relation d'égalité presque partout. On définit une distance sur $\mathscr{E}$ en posant

$$d(X,Y) = \mathbf{E}\min(1, |X-Y|).$$

1. Montrer que cela définit bien une distance.
2. Soient $X, (X_n)$ des variables aléatoires. Montrer que (X_n) converge en probabilité vers X si et seulement si $\lim_{n\to\infty} d(X_n, X) = 0$.
3. Montrer que $\mathscr{E}$ est complet pour cette distance.

Exercice 6 La convergence presque sûre n'est pas métrisable

Soient $(X_n), X$ des variables aléatoires de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ dans $\mathbf{R}$.

1. Montrer que si (X_n) converge vers X en probabilité, alors il existe une sous-suite $X_{\sigma(n)}$ qui converge presque sûrement vers X.
2. Réciproquement, on suppose que de toute sous-suite $(X_{\sigma(n)})$ de (X_n) on peut extraire une sous-sous-suite $(X_{\sigma(\tau(n))})$ qui converge vers X presque sûrement. Montrer que (X_n) converge vers X en probabilité.
3. Montrer qu'il n'existe pas de distance d sur l'ensemble des variables aléatoires telle que $d(X_n, X) \to 0$ si et seulement si (X_n) converge vers X presque sûrement.

Exercice 7 Théorème du renouvellement

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d., avec $X_1 > 0$ p.s. et $\mathbf{E}X_1 < +\infty$. On peut penser à X_n comme la durée de vie d'une ampoule. On pose $T_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $N_t = \sup\{n \text{ t.q. } T_n \leqslant t\}$ est alors le nombre de fois qu'il a fallu changer l'ampoule entre le temps 0 et le temps t. Montrer que, presque sûrement,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mathbf{E}\tau_1}.$$

Indication : *on commencera par observer que l'événement « $\lim_{t\to\infty} N_t = \infty$ » a probabilité* 1.

Exercice 8 Plus longue série de «pile» consécutifs

Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. avec $\mathbf{P}(X_i = 1) = \mathbf{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$. On pose

$$\ell_n = \max\{m \in \{1, \dots, n\} \text{ t.q. } X_{n-m+1} = \cdots = X_n = 1\}$$

la longueur de la série de «1» en cours et $L_n = \max\{\ell_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}$ la longueur de la plus longue série observée avant le temps n. On va montrer que (presque sûrement)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n}{\log_2 n} = 1.$$

1. Montrer que pour tous $n \in \mathbf{N}, \varepsilon > 0$, on a $\mathbf{P}(\ell_n \geqslant (1+\varepsilon)\log_2 n) \leqslant n^{-(1+\varepsilon)}$ puis (à l'aide du lemme de Borel–Cantelli) que, presque sûrement
$$\limsup_{n\to\infty} L_n/\log_2 n \leqslant 1.$$
2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que pour n assez grand pour que $\lfloor n/\{\lfloor (1-\varepsilon)\log_2 n\rfloor + 1\}\rfloor \geqslant n/\log_2 n$,
$$\mathbf{P}(L_n \leqslant (1-\varepsilon)\log_2 n) \leqslant (1 - n^{-(1-\varepsilon)}/2)^{n/\log_2 n} \leqslant \exp(-n^{\varepsilon}/2\log_2 n).$$
Indication : *découper* $\{1, \dots, n\}$ *en intervalles* (B_i) *de taille* $k = \lfloor (1-\varepsilon)\log_2 n + 1\rfloor$ *et utiliser le fait que si il existe* $i \in \{1, \dots, \lfloor n/k\rfloor\}$ *tel que* $X_j = 1$ *pour tout* $j \in B_i$*, alors* $L_n \geqslant k$.
3. Utiliser le lemme de Borel–Cantelli pour conclure que, presque sûrement,
$$\liminf_{n\to\infty} L_n/\log_2 n \geqslant 1.$$