

Feuille d'exercices numéro 3
Autour du théorème central limite

Exercice 1 Théorème de Portmanteau

Soient $(X_n), X$ des variables aléatoires. Montrer l'équivalence entre les 4 conditions suivantes

1. Pour toute fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ continue bornée, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}f(X_n) = \mathbf{E}f(X).$$

2. Pour tout ouvert $G \subset \mathbf{R}$, on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n \in G) \geq \mathbf{P}(X \in G).$$

3. Pour tout fermé $F \subset \mathbf{R}$, on a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n \in F) \leq \mathbf{P}(X \in F).$$

4. Pour tout borélien $A \subset \mathbf{R}$ tel que $\mathbf{P}(X \in \partial A) = 0$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n \in A) = \mathbf{P}(X \in A).$$

Exercice 2 Convergence faible dans le cas discret

Soient $(X_n), X$ des variables aléatoires à valeurs dans \mathbf{N} . Montrer l'équivalence entre les énoncés suivants :

1. La suite (X_n) converge faiblement vers X .
2. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n = k) = \mathbf{P}(X = k).$$

Exercice 3 Distance de Lévy

Soit \mathcal{P} l'ensemble des lois de probabilités sur \mathbf{R} . Si $\mu \in \mathcal{P}$, on note $F_\mu(t) = \mu(]-\infty, t])$ la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi μ . On définit une distance sur \mathcal{P} en posant

$$d(\mu, \nu) = \inf\{\varepsilon > 0 \text{ t.q. } F_\mu(x - \varepsilon) - \varepsilon \leq F_\nu(x) \leq F_\mu(x + \varepsilon) + \varepsilon, \forall x \in \mathbf{R}\}.$$

1. Montrer que d est bien une distance sur \mathcal{P} .
2. Soit $(X_n), X$ des variables aléatoires de lois respectives μ_n, μ . Montrer que (X_n) converge faiblement vers X si et seulement si $\lim d(\mu_n, \mu) = 0$.

Exercice 4 Piper un dé ?

Est-il possible de truquer un dé à 6 faces de telle sorte que, en lançant (indépendamment) deux fois ce dé, la somme des deux lancers suive la loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$?

Exercice 5 Calculs de fonctions caractéristiques

Calculer la fonction caractéristique de la variable aléatoire X dans les cas suivants

1. $\mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(X = -1) = 1/2$.
2. X suit une loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$.
3. X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
4. X suit une loi de Cauchy de paramètre $c > 0$, c'est-à-dire une loi donnée par la densité

$$\frac{c}{\pi(c^2 + x^2)}.$$

Exercice 6 Loi de Cauchy

1. Soient X_1, \dots, X_n des variables indépendantes i.i.d. suivant la loi de Cauchy de paramètre 1, et $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Quelle est la loi de S_n/n ?
2. Le résultat de la question précédente semble contredire la loi des grands nombres. Où est l'erreur ?
3. Soient Z, T deux variables aléatoires i.i.d. de loi gaussienne $N(0, 1)$. Montrer que Z/T suit une loi de Cauchy de paramètre 1.
4. Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi, avec une loi symétrique et ayant la propriété que pour tous nombres positifs α, β , les variables aléatoires $\alpha X + \beta Y$ et $(\alpha + \beta)X$ ont même loi. Montrer que la loi commune de X et de Y est une loi de Cauchy.

Exercice 7 Une caractérisation de la loi gaussienne

Soient X, Y deux variables aléatoires i.i.d. L^2 ayant la propriété que $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ a même loi que X . On pose $\sigma^2 = \mathbf{Var}(X)$.

1. Vérifier que la loi gaussienne $N(0, \sigma^2)$ a la propriété requise. Le but de l'exercice est de montrer que c'est la seule loi ayant cette propriété.
2. Montrer que $\mathbf{E}X = 0$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, si X_1, \dots, X_{2^n} sont des variables aléatoires i.i.d. de même loi que X , alors la variable aléatoire

$$\frac{1}{2^{n/2}} (X_1 + \dots + X_{2^n})$$

a même loi que X .

4. Conclure à l'aide du théorème central limite.

Exercice 8 Tension

1. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires qui converge faiblement. Montrer que cette suite est tendue, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K > 0$ tel que pour tout n , $\mathbf{P}(|X_n| \geq K) \leq \varepsilon$.
2. Montrer que si (X_n) est une suite tendue de variables aléatoires et si (Y_n) tend vers 0 en probabilité, alors $(X_n Y_n)$ tend vers 0 en probabilité.

Exercice 9 Auto-renormalisation

Soient (X_n) des variables aléatoires i.i.d. L^2 , avec $\mathbf{E}X_1 = 0$ et $\mathbf{Var}(X_1) > 0$. On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$. On veut montrer que la suite de variables aléatoires

$$\frac{S_n}{\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right)^{1/2}}$$

converge faiblement vers une variable aléatoire de loi gaussienne $N(0, 1)$.

1. Montrer que la suite $\frac{\sigma\sqrt{n}}{(\sum_{i=1}^n X_i^2)^{1/2}}$ converge presque sûrement vers 1.
2. Conclure à l'aide de l'exercice précédent.

Exercice 10 Une application non probabiliste du théorème central limite

Calculer, à l'aide du théorème central limite, la limite de la suite (A_n) définie par

$$A_n = e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}.$$

Exercice 11 Indépendance et fonctions caractéristiques

Soit $\vec{X} = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur aléatoire. Montrer que les variables aléatoires (X_1, \dots, X_d) sont indépendantes si et seulement si l'égalité suivante est vraie pour tout $\vec{t} = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbf{R}^d$

$$\Phi_{\vec{X}}(\vec{t}) = \prod_{j=1}^d \Phi_{X_j}(t_j).$$