Feuille d'exercices numéro 4

Marches aléatoires, temps d'arrêt.

Dans toute cette feuille d'exercices, (X_n) désigne une suite de variables aléatoires i.i.d. et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. On note $(\mathcal{F}_n)$ la filtration associée à (X_n), c'est-à-dire $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

Exercice 1 Identifier le comportement d'une marche aléatoire

Déterminer les limites supérieure et inférieure presque sûres de S_n dans les cas suivants :

1. On suppose que la loi de X_1 est symétrique (i.e. X_1 a même loi que $-X_1$).
2. On suppose que $X_1 \in L_1$ avec $\mathbf{E}X_1 \neq 0$.
3. On suppose que $X_1 \in L_2$ avec $\mathbf{E}X_1 = 0$ (utiliser le théorème central limite).

Exercice 2

Soient S et T deux temps d'arrêt. Montrer que $S \wedge T = \min(S, T)$ et $S \vee T = \max(S, T)$ sont aussi des temps d'arrêt.

Exercice 3

Soient S et T deux temps d'arrêt. Est-ce que $S + T$ est un temps d'arrêt ? Donner une preuve ou un contre-exemple.

Exercice 4

Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires telle que, pour tout n, Y_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable. Soit T un temps d'arrêt fini presque sûrement. Montrer que $Y_T \in \mathcal{F}_T$.

Exercice 5

Soient S et T deux temps d'arrêt tels que $S \leqslant T$. Montrer que $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

Exercice 6

Soient T_1 et T_2 deux temps d'arrêt tels que $T_1 \leqslant T_2$, et $A \in \mathcal{F}_{T_1}$. On définit T par

$$T(\omega) = \begin{cases} T_1(\omega) & \text{si } \omega \in A \\ T_2(\omega) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que T est un temps d'arrêt.

Exercice 7

On définit les temps d'arrêt

$$\alpha = \inf\{n \in \mathbf{N}^* \text{ t.q. } S_n > 0\},$$
$$\beta = \inf\{n \in \mathbf{N}^* \text{ t.q. } S_n < 0\},$$

Montrer que si $\mathbf{P}(\alpha < +\infty) < 1$, alors $\mathbf{P}(\sup S_n < +\infty) = 1$. Montrer que si $\mathbf{P}(\alpha < +\infty) = 1$, alors $\mathbf{P}(\sup S_n = +\infty) = 1$. En déduire les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
\lim S_n = +\infty \text{ p.s.} \quad &\iff \quad \mathbf{P}(\alpha < \infty) = 1 \text{ et } \mathbf{P}(\beta < \infty) < 1, \\
\lim S_n = -\infty \text{ p.s.} \quad &\iff \quad \mathbf{P}(\alpha < \infty) < 1 \text{ et } \mathbf{P}(\beta < \infty) = 1, \\
\begin{cases} \limsup S_n = +\infty \\ \liminf S_n = -\infty \end{cases} \text{ p.s.} \quad &\iff \quad \mathbf{P}(\alpha < \infty) = 1 \text{ et } \mathbf{P}(\beta < \infty) = 1.
\end{aligned}$$

Exercice 8 On ajoute des nombres dans $[0, 1]$ jusqu'à dépasser 1.

On suppose que X_n suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. Soit le temps d'arrêt $T = \inf\{n \text{ t.q. } S_n > 1\}$. Montrer que

1. $\mathbf{P}(T > n) = 1/n!$,
2. $\mathbf{E}T = e$,
3. $\mathbf{E}S_T = e/2$.

Exercice 9 Probabilité de sortie d'un intervalle pour la marche aléatoire simple.

On suppose que $\mathbf{P}(X_1 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = -1) = 1/2$. Soit $a < 0$ et $b > 0$ deux entiers. On définit des temps d'arrêt comme suit

$$\forall x \in \mathbf{Z}, T_x = \inf\{n \text{ t.q. } S_n = x\},$$
$$T = T_a \wedge T_b = \inf\{n \text{ t.q. } S_n \notin]a, b[\}.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in]a, b[$, on a $\mathbf{P}(x + S_{b-a} \notin]a, b[) \geqslant 2^{-(b-a)}$.
2. En déduire que
$$\mathbf{P}(T > n(b-a)) \leqslant \left(1 - 2^{-(b-a)}\right)^n$$
puis que $\mathbf{E}T < +\infty$.
3. A l'aide de l'équation de Wald, montrer que
$$\mathbf{P}(S_T = b) = \frac{-a}{b-a}, \qquad \mathbf{P}(S_T = a) = \frac{b}{b-a}.$$
4. **Application :** j'ai 8 euros et vous avez 2 euros. Nous décidons de jouer des parties de pile ou face (avec une pièce non biaisée) d'un enjeu de 1 euro jusqu'à ce que l'un d'entre nous soit ruiné. Quelle est la probabilité que ce soit vous qui soyez ruiné ?
5. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{Z}$, $\mathbf{P}(T_x < \infty) = 1$.
6. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{Z}^*$, $\mathbf{E}T_x = \infty$.

Exercice 10 Marche aléatoire non symétrique

On suppose que $\mathbf{P}(X_1 = 1) = p$ et $\mathbf{P}(X_1 = -1) = 1 - p$ avec $p > 1/2$. On pose $\alpha = \inf\{n \in \mathbf{N}^* \text{ t.q. } S_n > 0\}$ et $\beta = \inf\{n \in \mathbf{N}^* \text{ t.q. } S_n < 0\}$.

1. Montrer que $\mathbf{P}(\alpha < \infty) = 1$ et $\mathbf{P}(\beta < \infty) < 1$ *(on pourra utiliser l'exercice 7)*.
2. Soit $Y = \inf\{S_n; n \in \mathbf{N}^*\}$. Montrer que $\mathbf{P}(Y \leqslant -k) = \mathbf{P}(\beta < +\infty)^k$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.
3. Montrer que
$$\mathbf{E}\alpha = \frac{1}{\mathbf{E}X_1} = \frac{1}{2p-1}.$$
Indication : *appliquer l'équation de Wald à $\alpha \wedge n$ et faire tendre n vers $+\infty$*

Exercice 11 Vendre une maison de manière optimale

On suppose que $\mathbf{E}X_1^+ < \infty$. On fixe $c > 0$ et on pose

$$Y_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} X_k - cn.$$

Une interprétation est la suivante. Je souhaite vendre une maison. Je paye c par jour à mon agent immobilier, qui en échange fait visiter la maison à une personne par jour. Cette personne propose un prix d'achat X_n (que l'on suppose être des variables i.i.d. de loi connue). Quand faut-il accepter une offre pour maximiser son espérance de gain ?

1. Pour $a \in \mathbf{R}$, on pose $T_a = \inf\{n \text{ t.q. } X_n > a\}$ et $p = \mathbf{P}(X_1 > a)$. Si $p > 0$, calculer $\mathbf{E}Y_{T_a}$.
2. Montrer qu'il existe une unique solution $\alpha \in \mathbf{R}$ à l'équation $\mathbf{E}(X_1 - \alpha)^+ = c$, et que $\mathbf{E}Y_{T_\alpha} = \alpha$.
3. Soit τ un temps d'arrêt tel que $\mathbf{E}\tau < +\infty$. A l'aide de l'inégalité
$$Y_n \leqslant \alpha + \sum_{k=1}^{n} ((X_k - \alpha)^+ - c),$$
montrer que $\mathbf{E}Y_\tau \leqslant \alpha$. La stratégie de la question 2. est donc optimale.

Exercice 12 Deuxième équation de Wald

On suppose que $\mathbf{E}X_1 = 0$ et $\mathbf{E}X_n^2 = \sigma^2 < \infty$. On veut montrer que si T est un temps d'arrêt tel que $\mathbf{E}T < +\infty$, alors

$$\mathbf{E}S_T^2 = \sigma^2 \mathbf{E}T.$$

1. Montrer que si $n \geqslant m \geqslant 0$,
$$\mathbf{E}\left(S_{T\wedge n} - S_{T\wedge m}\right)^2 = \sigma^2 \sum_{k=m+1}^{n} \mathbf{P}(T \geqslant k).$$
2. Conclure.