Université Claude Bernard | Mathématiques
M1 Probabilités

Feuille d'exercices numéro 5
Marche aléatoire sur $\mathbf{Z}$.

Les exercices de cette feuille concernent la marche aléatoire simple en dimension 1 : soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbf{P}(X_n = 1) = \mathbf{P}(X_n = -1) = 1/2$, et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Les exercices **ne sont pas indépendants** : certains exercices font appel aux résultats des exercices précédents.

Exercice 1 Compter les chemins

Pour $0 \leqslant n_1 \leqslant n_2$ et $x_1, x_2 \in \mathbf{Z}$, on appelle chemin de (n_1, x_1) à (n_2, x_2) une suite

$$(k, u_k)_{n_1 \leqslant k \leqslant n_2}$$

vérifiant $u_{n_1} = x_1, u_{n_2} = x_2$, et $u_k - u_{k-1} = \pm 1$ pour tout k.

Soit $N_{n,x}$ le nombre de chemins de $(0,0)$ à (n,x). Montrer que

$$N_{n,x} = \binom{n}{\frac{n+x}{2}}.$$

En déduire que

$$\mathbf{P}(S_n = x) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{\frac{n+x}{2}}.$$

Exercice 2 Principe de réflexion

Soit $x, y \in \mathbf{N}^*$. Montrer que le nombre de chemins de $(0,x)$ à (n,y) qui passent par 0 (i.e. qui contiennent un couple $(k,0)$ pour un $k \in \{0,\dots,n\}$) est égal au nombre de chemins de $(0,-x)$ à (n,y).

Exercice 3 Théorème du scrutin

On suppose que lors d'une élection à 2 candidats, le candidat A a obtenu α votes, et le candidat B a obtenu β votes, avec $\beta < \alpha$. Montrer que la probabilité que le candidat A soit toujours strictement en tête lors du dépouillement est égale à

$$\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}.$$

On supposera que tous les dépouillements possibles ont même probabilité et on utilisera l'exercice précédent.

Exercice 4 Passages en zéro de la marche aléatoire

Soit (S_n) la marche aléatoire simple sur $\mathbf{Z}$. Montrer que

$$\mathbf{P}(S_i \neq 0 \text{ pour tout } i \in \{1,\dots,2n\}) = \mathbf{P}(S_{2n} = 0) = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}.$$

Exercice 5 Loi de l'arcsinus

On appelle loi arcsinus la loi sur $[0,1]$ dont la densité est données par la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}.$$

Cette loi apparaît dans l'étude de la marche aléatoire sur $\mathbf{Z}$ (cf. exercices suivants).

Soit X une variable aléatoire distribuée selon la loi arcsinus.

1. Calculer la fonction de répartition de X.
2. Calculer l'espérance de X.
3. Soit Z une variable aléatoire de loi de Cauchy (de densité $1/\pi(1+x^2)$). Montrer que la variable aléatoire $(1+Z^2)^{-1}$ suit la loi arcsinus.

Exercice 6   Loi de l'arcsinus pour le dernier passage en 0

Soit (S_n) la marche aléatoire simple sur $\mathbf{Z}$ (on pose $S_0 = 0$). Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note

$$L_{2n} = \sup\{m \in \{0, \dots, 2n\} \text{ t.q. } S_m = 0\}$$

l'instant du dernier passage en 0 avant le temps $2n$. On note aussi $u_{2m} = \mathbf{P}(S_{2m} = 0)$.

1. Montrer que, presque sûrement, la suite (L_{2n}) tend vers $+\infty$.
2. Montrer la formule $\mathbf{P}(L_{2n} = 2k) = u_{2k}u_{2n-2k}$.
3. Soit $x \in]0, 1[$. On pose $k_n = \lfloor xn \rfloor$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} n\mathbf{P}(L_{2n} = 2k_n) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}.$$

4. Montrer que la suite de variables aléatoires $(L_{2n}/2n)$ converge faiblement vers une variable aléatoire de loi arcsinus (*question plus difficile ; pour* $0 < a < b < 1$, *on calculera* $\lim \mathbf{P}(a \leqslant L_{2n}/n \leqslant b)$ *comme une somme de Riemann à l'aide de la question précédente*).
5. Deux joueurs jouent à pile ou face (pièce non biaisée) chaque jour de l'année et comparent leurs scores cumulés. Comment estimeriez la vous la probabilité que l'un des joueurs soit en tête sans interruption du 1er juillet au 31 décembre ?

Exercice 7   Loi de l'arcsinus pour la proportion de temps passée dans les entiers positifs.

1. On note π_{2n} le nombre de $i \in \{1, \dots, 2n\}$ tels que S_{i-1} et S_i sont positifs. Montrer que π_{2n} a même distribution que L_{2n}, c'est-à-dire $\mathbf{P}(\pi_{2n} = k) = u_{2k}u_{2n-2k}$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.
2. On note t_n le nombre de $i \in \{0, \dots, n\}$ tels que $S_i \geqslant 0$. Montrer que la suite (t_n/n) converge faiblement vers une variable aléatoire de loi arcsinus.