

Feuille d'exercices numéro 6
Espérance conditionnelle.

Dans toute la feuille d'exercices, on travaille sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbf{P})$ et sauf mention contraire, les variables aléatoires sont supposées être définies sur cet espace. Dans toute (in)égalité faisant intervenir l'espérance conditionnelle, la mention «presque sûrement» est sous-entendue.

Exercice 1 Inégalité de Markov conditionnelle

Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_0$ une sous-tribu. Pour $A \in \mathcal{F}_0$, on définit la probabilité conditionnelle de A sachant $\mathcal{F}$ par la formule

$$\mathbf{P}[A|\mathcal{F}] = \mathbf{E}[\mathbf{1}_A|\mathcal{F}].$$

Montrer l'inégalité suivante pour toute variable aléatoire X positive et tout $t > 0$,

$$\mathbf{P}[X \geqslant t|\mathcal{F}] \leqslant \frac{1}{t}\,\mathbf{E}[X|\mathcal{F}].$$

Exercice 2 Inégalité de Cauchy–Schwartz conditionnelle

Soit $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}_0$ une sous-tribu. Montrer que pour toutes variables aléatoires X, Y dans L^2, on a

$$|\mathbf{E}[XY|\mathcal{G}]| \leqslant \left(\mathbf{E}[X^2|\mathcal{G}]\right)^{1/2} \left(\mathbf{E}[Y^2|\mathcal{G}]\right)^{1/2}.$$

Exercice 3 Deux espérances conditionnelles ne commutent pas

Donner un exemple (par exemple avec $\Omega = \{a, b, c\}$) d'une variable aléatoire X et de deux sous-tribus $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ pour lesquelles

$$\mathbf{E}\left[\mathbf{E}[X|\mathcal{F}_1]|\mathcal{F}_2\right] \neq \mathbf{E}\left[\mathbf{E}[X|\mathcal{F}_2]|\mathcal{F}_1\right].$$

Exercice 4 Espérance conditionnelle et indépendance

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que X, Y et XY soient dans L^1. Montrer que (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) et montrer que les implications réciproques ne sont pas vraies.

(1) X et Y sont indépendantes.

(2) $\mathbf{E}[Y|X] = \mathbf{E}\,Y$.

(3) $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y)$.

Exercice 5

Soient $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ deux sous-tribus de $\mathcal{F}_0$, et X une variable aléatoire dans L^2. Montrer que

$$\mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}[X|\mathcal{G}])^2\right) = \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}[X|\mathcal{F}])^2\right) + \mathbf{E}\left((\mathbf{E}[X|\mathcal{F}] - \mathbf{E}[X|\mathcal{G}])^2\right)$$

Que devient la formule dans le cas particulier où $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$?

Exercice 6 Somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires

Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. d'espérance μ et de variance $\sigma^2 < +\infty$. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$, indépendante de (Y_n) et telle que $\mathbf{E}\,N < +\infty$. On pose

$$X = Y_1 + \cdots + Y_N.$$

1. Calculer $\mathbf{E}[X|N]$.
2. Calculer $\mathbf{E}\,X$.
3. Montrer la formule suivante

$$\mathbf{Var}\,X = \sigma^2\,\mathbf{E}\,N + \mu^2\,\mathbf{Var}\,N.$$

(Pour se rappeler la formule on peut penser aux deux cas particuliers où Y_1 ou N est constante).

Exercice 7

Soit $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}_0$ une sous-tribu, et X, Y deux variables aléatoires dans L^2 telles que $\mathbf{E}\, X^2 = \mathbf{E}\, Y^2$ et $X = \mathbf{E}[Y|\mathcal{G}]$. Montrer que $X = Y$.

Exercice 8

Soit $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}_0$ une sous-tribu, et soit Y une variable aléatoire dans L^1 telle que $\mathbf{E}[Y|\mathcal{G}]$ ait la même loi que Y. Montrer que $Y = \mathbf{E}[Y|\mathcal{G}]$.

Exercice 9

Soient X, Y deux variables aléatoires dans L^1 vérifiant $\mathbf{E}[X|Y] = Y$ et $\mathbf{E}[Y|X] = X$. Montrer que $X = Y$.