Feuille d'exercices numéro 7

Martingales. Théorème de convergence presque sûre.

Exercice 1

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. indépendantes avec $\mathbf{E}\,X_n = 0$ et $\mathbf{Var}\,X_n = \sigma_n^2 < +\infty$. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $s_n^2 = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2$ et $Y_n = S_n^2 - s_n^2$. Montrer que (Y_n) est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.

Exercice 2

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. indépendantes avec $\mathbf{E}\,X_n = 0$, et $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Pour $k \in \mathbf{N}^*$, on pose

$$Y_n^{(k)} = \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} X_{i_1} \ldots X_{i_k}.$$

Montrer que $(Y_n^{(k)})_{n\geqslant 1}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.

Exercice 3

Soient (X_n) et (Y_n) deux sous-martingales (pour la même filtration). On pose $Z_n = \max(X_n, Y_n)$. Montrer que la suite (Z_n) est aussi une sous-martingale.

Exercice 4 Une martingale qui ne converge pas dans L^1

Soit (S_n) une marche aléatoire simple sur $\mathbf{Z}$, c'est-à-dire $S_0 = 0$ et, pour $n \geqslant 1$,

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n,$$

où (X_n) est une suite de v.a. i.i.d. vérifiant $\mathbf{P}(X_1 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = -1) = 1/2$. On pose aussi $\Sigma_n = S_n + 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, $T = \inf\{n \text{ t.q. } \Sigma_n = 0\}$ et $M_n = \Sigma_{T\wedge n}$.

1. Montrer que (M_n) est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.
2. Montrer que (M_n) converge presque sûrement vers 0.
3. Montrer que (M_n) ne converge pas dans L^1.

Exercice 5

Soit (U_n) une suite de v.a. i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$, et $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Soit $a \in [0, 1]$. On définit une suite de variables aléatoires (X_n) en posant $X_0 = a$, puis par récurrence,

$$X_{n+1} = \begin{cases} \frac{X_n}{2} & \text{si } X_n \leqslant U_{n+1} \\ \frac{1+X_n}{2} & \text{si } X_n > U_{n+1}. \end{cases}$$

Montrer que (X_n) est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.

Exercice 6

Soit (Y_n) une suite de v.a. i.i.d. positives vérifiant $\mathbf{E}\,Y_1 = 1$ et $\mathbf{P}(Y_1 = 1) < 1$. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$, et pour $n \geqslant 1$,

$$X_n = \prod_{k=1}^{n} Y_k.$$

1. Montrer que (X_n) est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.
2. Montrer que (X_n) converge vers presque sûrement vers une variable aléatoire Z.
3. (*) Montrer que $Z = 0$ (on pourra considérer $\sqrt{X_n}$).

Exercice 7 Une martingale qui converge en probabilité, mais pas presque sûrement

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. indépdendantes vérifiant

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité } 1/2n \\ 0 & \text{avec probabilité } 1-1/n \\ -1 & \text{avec probabilité } 1/2n. \end{cases}$$

et $(\mathcal{F}_n)$ la filtration associée. On définit une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ en posant $Y_1 = X_1$, et pour $n \geqslant 2$,

$$Y_n = \begin{cases} X_n & \text{si } Y_{n-1} = 0, \\ nY_{n-1}|X_n| & \text{si } Y_{n-1} \neq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que (Y_n) est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$..
2. Montrer que (Y_n) converge vers 0 en probabilité.
3. Montrer à l'aide du lemme de Borel–Cantelli que (Y_n) ne converge pas vers 0 presque sûrement. Quelle hypothèse fait défaut pour l'application du théorème de convergence presque sûre ?

Exercice 8

Donner un exemple de martingale (X_n) qui converge presque sûrement vers $-\infty$.

Indication : on pourra prendre $X_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, où (ξ_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes (mais non identitiquement distribuées) à déterminer.

Exercice 9

Soit (X_n) une surmartingale. On suppose que $\mathbf{E}\, X_n = 0$ pour tout n. Montrer que (X_n) est une martingale.