Feuille d'exercices numéro 9
Chaînes de Markov.

Quand on considère une chaîne de Markov, sauf mention contraire on suppose qu'elle est définie sur l'espace canonique.

Exercice 1 Soit $p \in]0,1[$, et considérons la chaîne de Markov d'espace d'états $\mathbf{N}$ et de matrice de transition

$$P(i,j) = \begin{cases} p & \text{si } j = i+1 \\ 1-p & \text{si } j = i-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette chaîne est-elle irréductible ? Classifier les états.

Exercice 2 On considère la chaîne de Markov sur l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 10\}$ donnée par la matrice de transition suivante (les éléments nuls ne sont pas indiqués).

$Q =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1							0.5		0.5	
2		0.9		0.1						
3					0.2			0.8		
4		1								
5		0.2	0.2	0.2	0.2					0.2
6	0.4				0.6					
7	0.1								0.9	
8			1							
9							0.5		0.5	
10										1

Classifier les états.

Exercice 3

Soit $S = \{1, \ldots, 6\}$. Compléter la matrice suivante pour qu'elle soit une matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} \cdot & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 7/8 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & \cdot & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & \cdot \end{bmatrix}.$$

Classifier les états et montrer qu'il existe deux ensembles fermés irréductibles non vides C_1, C_2. Pour $i = 1, 2$ et $x \in S$, calculer

$$\mathbf{P}_x(X_n \in C_i \text{ pour tout } n \text{ assez grand}).$$

Exercice 4 Sur l'ensemble $S = \{0, 1, \ldots, n\}$ on considère la chaîne de Markov de matrice de transition P donnée pour $0 \leqslant x \leqslant n-1$ par

$$P(x,y) = \begin{cases} p & \text{si } y = x+1 \\ 1-p & \text{si } y = 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

l'état n étant absorbant (i.e. $P(n,x) = \delta_{n,x}$). Classifier les états de cette chaîne. Soit τ le temps d'atteinte de l'état n. Quelle est la valeur de $\mathbf{E}_x\,\tau$?

Application : combien de lancers d'un dé à 6 faces faut-il faire en moyenne pour voir apparaître 4 fois consécutivement le nombre 6 ?

Exercice 5 Classifiez, en fonction des nombres $(p_k), (q_k)$, les états de la chaîne de Markov sur $\mathbf{N}$ dont la matrice de transition est donnée par

$$\begin{array}{lll} Q(0,0)=\alpha, & Q(0,1)=1-\alpha, & 0<\alpha<1 \\ Q(1,2)=\beta, & Q(1,3)=1-\beta, & 0<\beta<1 \\ Q(k,1)=p_k, & Q(k,k+2)=q_k=1-p_k, & 0<p_k<1, k\geqslant 2. \end{array}$$

Exercice 6 Soit la chaîne de Markov sur $\mathbf{N}$ de matrice de transition

$$P(0,0)=1, \quad P(k,m)=e^{-k}\frac{k^m}{m!}, k\geqslant 1, m\geqslant 0.$$

Autrement dit, $P(k,\cdot)$ suit une loi de Poisson de paramètre k.

1. Classifier les états.
2. Soit (X_n) la chaîne de Markov sur l'espace canonique. Montrer que pour tout $x\in\mathbf{N}$, (X_n) est une martingale pour la mesure $\mathbf{P}_x$.
3. Montrer que pour tout $x\in\mathbf{N}$, $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge $\mathbf{P}_x$-presque sûrement vers 0.

Exercice 7 Marche aléatoire sur $\mathbf{Z}$.

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbf{N}$. On considère une marche aléatoire sur $\mathbf{Z}$ dont les pas sont i.i.d. de loi μ. C'est la chaîne de Markov associée à la matrice de transition sur $\mathbf{Z}$ définie par $Q(x,y)=\mu(y-x)$.

1. Montrer que les états de la chaîne sont soit tous récurrents, soit tous transitoires. Soit ξ une v.a. de loi μ. On suppose que $\mathbf{E}\,|\xi|<+\infty$ et on pose $m=\mathbf{E}\,\xi$.
2. Montrer que si $m\neq 0$, tous les états sont transitoires.
3. (*) On suppose que $m=0$. Montrer que tous les états sont récurrents.
4. Montrer que la chaîne est irréductible si et seulement si $\mathrm{PGCD}(\{n\in\mathbf{Z} \text{ t.q. } \mu(n)>0\})=1$.

Exercice 8

Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une chaîne de Markov associée à une matrice de transition P sur un ensemble d'états S.

1. Soit $r\in\mathbf{N}$. Est-ce que $(X_{r+n})_{n\in\mathbf{N}}$ est une chaîne de Markov ?
2. Est-ce que $(X_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ est une chaîne de Markov ?
3. Est-ce que $((X_n,X_{n+1}))_{n\in\mathbf{N}}$ est une chaîne de Markov ?

En cas de réponse positive, on précisera quelle est la matrice de transition.

Exercice 9

Soit une chaîne de Markov assiociée à une matrice de transition P sur un ensemble d'états S. On suppose qu'il existe un état absorbant s (i.e. $P(s,s)=1$) et que pour tout $x\in S, x\rightsquigarrow s$. Classifier les états.

Exercice 10

On définit une suite de variables aléatoires (X_n) par récurrence en posant $X_0=1, X_1=2$ et

$$X_{n+1}=\begin{cases} X_n+X_{n-1} & \text{avec probabilité } 1/2 \\ |X_n-X_{n-1} & \text{avec probabilité } 1/2. \end{cases}$$

On pose $Y_n=(X_{n-1},X_n)$. Montrer que (Y_n) est une chaîne de Markov (pour une matrice de transition sur $\mathbf{N}^2$ à déterminer). Classifier ses états.

Exercice 11

On considère la chaîne de Markov suivante. Soit $N\in\mathbf{N}$, et P la matrice de transition sur $S=\{0,\dots,N\}$ par

$$P(i,j)=\binom{N}{j}\left(\frac{i}{N}\right)^j\left(1-\frac{i}{N}\right)^{N-j}.$$

1. Que vaut $P(0,j)$? $P(N,j)$? Classifier les états.
2. Montrer que pout tout $x\in S$, la suite (X_n), définie sur l'espace canonique $\Omega=S^{\mathbf{N}}$, est une martingale par rapport à la mesure de probabilité $\mathbf{P}_x$. Montrer qu'elle converge presque sûrement vers une variable aléatoire dont on déterminera la loi.