Université Claude Bernard
M1 Probabilités Mathématiques

Examen partiel du 29 mars 2011
Durée : 2 heures

Aucun document n'est autorisé.

On rappelle qu'une variable aléatoire X de loi $N(0, \sigma^2)$ a pour densité la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2\sigma^2)$$

et pour fonction caractéristique la fonction ($t \in \mathbf{R}$),

$$\phi_X(t) = \mathbf{E} \exp(itX) = \exp(-t^2\sigma^2/2).$$

Exercice 1 Questions de cours

1. Donner la définition d'un temps d'arrêt associé à une filtration $(\mathcal{F}_n)$.
2. Énoncer l'identité de Wald.

Exercice 2

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $N(0, 1)$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Démontrer que $S_n/\sqrt{n}$ suit une loi $N(0, 1)$ — on justifiera le résultat.
2. Pour $t \in \mathbf{R}$, soit A_t l'événement
$$« \limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} > t ».$$
Montrer que A_t a probabilité 0 ou 1.
3. Montrer l'inégalité
$$\mathbf{P}(A_t) \geqslant \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > t\right).$$
4. En déduire que, presque sûrement,
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = +\infty.$$

Exercice 3

Soit (X_n) une suite variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme dans $[0, 1]$. On pose $Y_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Calculer $\mathbf{P}(Y_n > c)$ pour tout $c \in [0, 1]$.
2. Montrer que la suite (Y_n) converge vers 0 en probabilité.
3. Montrer que la suite (Y_n) converge vers 0 presque sûrement.

Exercice 4

On considère (S_n) la marche aléatoire simple sur $\mathbf{Z}$. On en rappelle la définition : (X_n) désigne une suite de variables aléatoires i.i.d. vérifiant $\mathbf{P}(X_n = 1) = \mathbf{P}(X_n = -1) = 1/2$, et on définit $(S_n)_{n\geqslant 0}$ par

$$\begin{cases} S_n = X_1 + \cdots + X_n & \text{si } n > 0 \\ S_0 = 0. \end{cases}$$

On note pour tout entier k,

$$r_{2k} = \mathbf{P}(S_{2k} = 0)$$

$$v_{2k} = \mathbf{P}(S_j \neq 0 \text{ pour tout } 0 < j \leqslant 2k)$$

$$f_{2k} = \mathbf{P}(S_{2k} = 0 \text{ et } S_j \neq 0 \text{ pour tout } 0 < j < 2k)$$

On a vu en TD que $r_{2k} = v_{2k}$ pour tout k, et on pourra utiliser librement ce résultat [1].

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\mathbf{P}\left(\text{il existe un unique } k \in \{1, \ldots, n\} \text{ tel que } S_{2k} = 0\right) = \sum_{k=1}^{n} f_{2k} v_{2n-2k}.$$

2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,

$$r_{2n} = \sum_{k=1}^{n} f_{2k} r_{2n-2k}.$$

3. Pour $m \geqslant 2$, on note I_m l'ensemble des temps de retour en 0 de la marche aléatoire avant le temps m, c'est-à-dire

$$I_m = \{j \in \{1, \ldots, m\} \text{ t.q. } S_j = 0\}.$$

   Expliquer pourquoi on a $I_{2n} = I_{2n+1}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
4. Montrer que pour tout entier $m \geqslant 2$, on a $\mathbf{P}(\operatorname{card} I_m = 0) = \mathbf{P}(\operatorname{card} I_m = 1)$.
5. On note U_m le nombre de sommets visités une et une seule fois par la marche aléatoire jusqu'au temps m, c'est-à-dire

$$U_m = \operatorname{card}\{k \in \{0, \ldots, m\} \text{ tel que } S_j \neq S_k \text{ pour tout } j \in \{0, \ldots, m\} \text{ différent de } k\}.$$

   On note également

$$\tilde{U}_m = \operatorname{card}\{k \in \{1, \ldots, m\} \text{ tel que } S_j \neq S_k \text{ pour tout } j \in \{1, \ldots, m\} \text{ différent de } k\}.$$

   Montrer que pour tout $m \geqslant 2$, $\tilde{U}_m$ a la même loi que U_{m-1}.
6. Montrer que, pour un choix des signes $\pm$ à préciser, on a la relation (pour tout $m \geqslant 2$).

$$U_n = \tilde{U}_m \pm \mathbf{1}_{\{\operatorname{card}(I_m)=0\}} \pm \mathbf{1}_{\{\operatorname{card}(I_m)=1\}}.$$

7. En déduire que, pour tout $m \geqslant 1$, on a $\mathbf{E}U_m = 2$.

1. s'il vous reste du temps à la fin de l'épreuve vous pouvez le redémontrer.