Université Claude Bernard
M1 Probabilités

Mathématiques

Examen final du 1 juin 2012
Durée : 3 heures

La consultation des notes de cours est de TD est autorisée.

Exercice 1

Soit p un nombre réel tel que $1/2 < p < 1$, et $q = 1 - p$. Soit (X_n) une suite de v.a. i.i.d. telles que $\mathbf{P}(X_1 = 1) = p$ et $\mathbf{P}(X_1 = -1) = q$. On pose $S_0 = 0$, et pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

1. Montrer que la suite $((q/p)^{S_n})$ est une martingale pour la filtration induite par (X_n).
2. Soient a, b des entiers tels que $a < 0 < b$. On introduit les temps d'atteinte $T_a = \inf\{n \geqslant 0 \text{ t.q. } S_n = a\}$ et $T_b = \inf\{n \geqslant 0 \text{ t.q. } S_n = b\}$. Calculer $\mathbf{P}(T_a < T_b)$.

Exercice 2

Soit (ε_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. vérifiant $\mathbf{P}(\varepsilon_n = 1) = \mathbf{P}(\varepsilon_n = -1) = 1/2$. On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{k}.$$

1. Calculer l'espérance et la variance de S_n.
2. En invoquant un des théorèmes de convergence des martingales, montrer que la suite (S_n) converge presque sûrement vers une variable aléatoire Z.
3. Existe-t-il une constante $M \in \mathbf{R}^+$ telle que $\mathbf{P}(|Z| < M) = 1$?

Exercice 3

Soit P la matrice de transition suivante, sur l'espace d'états $S = \{1, \ldots, 6\}$.

$$P = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 2/3 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Classifier les états.
2. Pour tout $x \in S$, calculer

$$\alpha_x = \mathbf{P}_x(X_n = 3 \text{ pour tout } n \text{ assez grand}).$$

Exercice 4

Soit une matrice de transition sur un espace d'états S, et (X_n) la chaîne de Markov associée, définie sur son espace canonique. On suppose que la chaîne de Markov est irréductible et récurrente positive. Le temps d'atteinte d'un état $x \in S$ est noté $T_x = \inf\{n \geqslant 0 \text{ t.q. } X_n = x\}$. Pour x, y dans S, on définit

$$d(x,y) = \mathbf{E}_x\, T_y + \mathbf{E}_y\, T_x$$

Montrer que d est une distance sur S, c'est-à-dire qu'elle vérifie les axiomes suivants pour $x, y, z \in S$

1. $d(x,y) < +\infty$,
2. $x = y \iff d(x,y) = 0$,
3. $d(x,y) = d(y,x)$,
4. $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$

Exercice 5

Soit $\lambda : \mathbf{N} \to [0,1]$ une fonction telle que $\lambda(0) = 0$ et $\sum_n \lambda(n) = 1$. On suppose qu'il existe une infinité d'entiers n tels que $\lambda(n) > 0$. On pose $\rho = \sum_n n\lambda(n)$ (on peut avoir $\rho = +\infty$). On définit une matrice de transition P sur $\mathbf{N}$ par

$$P(x,y) = \begin{cases} \lambda(y) & \text{si } x = 0, \\ 1/x & \text{si } x \geqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y < x, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit (X_n) la chaîne de Markov associée, que l'on suppose définie sur l'espace canonique. Pour $x \in \mathbf{N}$, on introduit le temps d'arrêt

$$S_x = \inf\{n \geqslant 0 \text{ t.q. } X_n = x\}.$$

1. Cette chaîne de Markov est-elle irréductible ?
2. Cette chaîne de Markov est-elle apériodique ?
3. Soit $x \geqslant 1$. Montrer que $\mathbf{P}_x(S_0 < +\infty) = 1$. En déduire que la chaîne est récurrente.
4. Montrer que si $\rho < +\infty$, alors la chaîne est récurrente positive.