

Examen partiel du 27 mars 2012
Durée : 2 heures

Tous les documents sont autorisés.

Exercice 1

1. La fonction caractéristique d'une v.a. de loi de Poisson de paramètre λ est $\exp(\lambda(e^{it}-1))$. On en déduit que $A+B$ suit une loi de Poisson de paramètre $\alpha+\beta$.
2. Si $X \leqslant_{st} Y$, alors $\mathbf{P}(X=0) \geqslant \mathbf{P}(Y=0)$, donc $e^{-\lambda} \geqslant e^{-\mu}$ et $\lambda \leqslant \mu$. Réciproquement, si $\lambda \leqslant \mu$, soit Z une v.a. de loi de Poisson de paramètre $\mu-\lambda$, indépendante de X. Alors $X+Z$ a même loi que Y, et pour tout $t>0$, on a
$$\mathbf{P}(Y \geqslant t) = \mathbf{P}(X+Z \geqslant t) \geqslant \mathbf{P}(X \geqslant t)$$
car Z est à valeurs positives.

Exercice 2

1. (a) Si (R_n) ne tend pas vers $+\infty$, alors la suite (S_n) prend un nombre fini de valuers, donc est bornée. Or on a vu en cours que (comme X_1 n'est pas identiquement nulle) $\limsup S_n$ était ou bien p.s. égal à $+\infty$ ou bien p.s. égal à $-\infty$.

   (b) On a
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(R_n = R_{n-1}+1) &= \mathbf{P}(S_n \neq S_{n-1}, S_n \neq S_{n-2}, \ldots, S_n \neq 0)\\ &= \mathbf{P}(X_n \neq 0, X_n + X_{n-1} \neq 0, \ldots, X_n + X_{n-1} + \ldots X_1 \neq 0)\\ &= \mathbf{P}(X_1 \neq 0, X_1 + X_2 \neq 0, \ldots, X_1 + X_2 + \ldots X_n \neq 0)\\ &= \mathbf{P}(S_1 \cdots S_n \neq 0),\end{aligned}$$
et l'avant-dernière égalité est vraie car $(X_1, \ldots, X_n)$ a même loi que $(X_n, \ldots, X_1)$.

   (c) On a $S_1 \cdots S_n \neq 0 \iff T > n$. Par ailleurs $R_n = R_{n-1} + \mathbf{1}_{R_n = R_{n-1}+1}$, donc par la question précédente,
$$\mathbf{E}R_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(S_1 \cdots S_k \neq 0) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(T > k).$$
Or (intersection décroissante d'événements) $\lim \mathbf{P}(T>n) = \mathbf{P}(T=\infty)$, donc par le théorème des moyennes de Cesarò, on a
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{E}R_n}{n} = \mathbf{P}(T=\infty).$$

2. (a) $\mathbf{E}X_1 = 2p-1 > 0$, donc par la loi forte des grands nombres S_n est p.s. équivalent à $(2p-1)n$, donc tend vers $+\infty$.

   (b) Les événements (A_m) sont disjoints, de plus leur union contient l'événement « S_n tend vers $+\infty$ » (puisque si S_n tend vers l'infini il existe un plus grand entier m où S_n atteint son minimum). Par la question précédente, on a $1 = \mathbf{P}(\bigcup A_m) = \sum \mathbf{P}(A_m)$.

   (c) On peut réécrire
$$A_m = \{X_1 + \cdots + X_m \leqslant 0, X_2 + \cdots + X_m \leqslant 0, \ldots, X_m \leqslant 0\} \cap \{X_{m+1} > 0, X_{m+1} + X_{m+2} > 0, \ldots\}$$
On utilise le fait que $(X_n)_{n \leqslant m}$ est indépendant de $(X_n)_{n>m}$, puis que $(X_1, \ldots, X_m)$ a même loi que $(X_m, \ldots, X_1)$, et enfin que $(X_n)_{n \geqslant m+1}$ a même loi que $(X_n)_{n \geqslant 1}$, pour écrire
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_m) &= \mathbf{P}(S_m \leqslant 0, S_{m-1} \leqslant 0, \ldots, S_1 \leqslant 0)\mathbf{P}(S_1 > 0, S_2 > 0, \ldots) && (1)\\ &= \mathbf{P}(T_1 > m)\mathbf{P}(S_k > 0 \text{ pour tout } k > 0) && (2)\end{aligned}$$
Si S_n tend vers $+\infty$ (ce qui est vrai p.s.), alors « $S_k > 0$ pour tout $k > 0$ » est équivalent à « $T = \infty$ », donc $\mathbf{P}(S_k > 0 \text{ pour tout } k > 0) = \mathbf{P}(T = \infty)$.

(d) On fait la somme sur m de l'identité montrée au (c), et on utilise la formule

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{P}(T_1 > m) = \mathbf{E} \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{1}_{T_1>m} = \mathbf{E} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} \mathbf{1}_{T_1=k} = \mathbf{E} \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbf{1}_{T_1=k} = \mathbf{E}T_1.$$

(e) Comme (S_n) tend p.s. vers $+\infty$, la marche aléatoire est transiente, et donc (théorème vu en cours) $\mathbf{P}(T = \infty) > 0$. Par la question (d), $\mathbf{E}T_1 < \infty$ et on peut donc appliquer l'équiation de Wald pour écrire

$$\mathbf{E}S_{T_1} = \mathbf{E}X_1\mathbf{E}T_1 = (2p-1)\mathbf{E}T_1.$$

Comme $T_1 < \infty$ p.s., on a $S_{T_1} = 1$ p.s., et donc $\mathbf{E}T_1 = 1/(2p-1)$ et $\mathbf{P}(T = \infty) = 2p - 1$.

Exercice 3

1. Les variables aléatoires (Y_n) ont même loi, car $(X_n, \dots, X_{n+k-1})$ a même loi que $(X_1, \dots, X_k)$. Par contre elles ne sont pas indépendantes si $k > 1$ (pour $k = 2$, la fonction $f(x, y) = xy$ est un contre-exemple : X_1X_2 n'est pas indépendant de X_2X_3 en général).
2. Par le théorème du regroupement par paquets, à i fixé, les v.a. $(Z_n^{(i)})_{n\geqslant 0}$ sont i.i.d., et la loi forte des grands nombres permet de conclure.
3. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(|Y_n| > \varepsilon n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(|Y_1| > \varepsilon n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon(n-1)}^{\varepsilon n} \mathbf{P}(|Y_1| > t)dt = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\infty} \mathbf{P}(|Y_1| > t)dt = \frac{\mathbf{E}|Y_1|}{\varepsilon} < \infty$$

   Le lemme de Borel–Cantelli implique que p.s. $|Y_n|/n \leqslant \varepsilon$ pour n suffisemment grand. C'est vrai simultanément pour tout $\varepsilon > 0$ rationnel, et donc $|Y_n|/n$ tend p.s. vers 0.
4. On découpe la somme par blocs de longueur k, la somme des $i$èmes termes de chaque bloc converge d'après (b), et les termes restants tendent vers 0 d'après (c).