Université Claude Bernard
M1 Probabilités

Mathématiques

**Examen partiel du 27 mars 2012**
**Durée : 2 heures**

Tous les documents sont autorisés.

## Exercice 1

Soient $X$ et $Y$ des variables aléatoires. On dit que $Y$ majore stochastiquement $X$ (on écrit $X \leqslant_{st} Y$) si, pour tout réel $t$, on a

$$\mathbf{P}(X \geqslant t) \leqslant \mathbf{P}(Y \geqslant t).$$

1. Soient $A$ et $B$ deux variables aléatoires indépendantes, de loi de Poisson de paramètres respectifs $\alpha$ et $\beta$. Déterminer la loi de $A+B$.
2. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires de loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda$ et $\mu$. Montrer (en utilisant la question 1) l'équivalence entre les énoncés suivants :
   (a) $X \leqslant_{st} Y$.
   (b) $\lambda \leqslant \mu$.

## Exercice 2 (les deux parties sont indépendantes).

Soit $(X_n)$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbf{Z}$. On suppose que $X_1$ n'est pas identiquement nulle. Soit $(S_n)$ la marche aléatoire associée : $S_0 = 0$ et pour $n \geqslant 1$,

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

On note $R_n$ le nombre d'entiers différents visités par la marche aléatoire jusqu'au temps $n$

$$R_n = \operatorname{card}\{S_k \ : \ 0 \leqslant k \leqslant n\}.$$

1. (a) Quel résultat du cours permet de conclure que $(R_n)$ converge presque sûrement vers $+\infty$ ?
   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,
   $$\mathbf{P}(R_n = R_{n-1} + 1) = \mathbf{P}(S_1 \cdots S_n \neq 0).$$
   (c) On note $T = \inf\{n > 0 \ : \ S_n = 0\}$ le temps de retour en 0 de la marche aléatoire. Déduire de la question précédente que
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{E}R_n}{n} = \mathbf{P}(T = \infty).$$
2. Dans cette question, on se place dans le cas particulier où $\mathbf{P}(X_1 = 1) = p, \mathbf{P}(X_1 = -1) = 1 - p$ avec $1/2 < p < 1$, et on se propose de montrer que $\mathbf{P}(T = \infty) = 2p - 1$.
   (a) Montrer que $(S_n)$ tend presque sûrement vers $+\infty$.
   (b) Pour $m \in \mathbf{N}$, soit $A_m$ l'événement
   $$A_m = \{S_k \geqslant S_m \text{ si } 0 \leqslant k \leqslant m\} \cap \{S_k > S_m \text{ si } k > m\}.$$
   Montrer que $\displaystyle\sum_{m\in\mathbf{N}} \mathbf{P}(A_m) = 1$.
   (c) On note $T_1 = \inf\{n \in \mathbf{N} \ : \ S_n = 1\}$ le temps d'atteinte de 1. Montrer que pour tout $m$, $\mathbf{P}(A_m) = \mathbf{P}(T_1 > m)\mathbf{P}(T = \infty)$.
   (d) En déduire que $\mathbf{P}(T = \infty) = (\mathbf{E}T_1)^{-1}$.
   (e) Calculer $\mathbf{E}T_1$ à l'aide de l'identité de Wald, et conclure.

**Exercice 3**

Soit $k > 1$ un entier, et $f : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ une fonction borélienne. Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variable aléatoires i.i.d.. On définit une suite $(Y_n)_{n \geqslant 1}$ en posant

$$Y_n = f(X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+k-1}).$$

On suppose que $\mathbf{E}|Y_1| < +\infty$. Le but de l'exercice est de montrer que la suite $(Y_n)$ vérifie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_n = \mathbf{E}Y_1 \quad \text{p.s.}$$

1. Les variables aléatoires $(Y_n)$ sont-elles indépendantes ? Sont-elles identiquement distribuées ?
2. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$, soit $(Z_n^{(i)})_{n \geqslant 0}$ la sous-suite de $(Y_n)$ définie par $Z_n^{(i)} = Y_{kn+i}$. Montrer (en utilisant un théorème du cours) que la suite $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Z_n^{(i)}$ converge p.s. vers $\mathbf{E}Y_1$.
3. Montrer à l'aide du lemme de Borel-Cantelli que la suite $\frac{1}{n} Y_n$ converge p.s. vers 0.
4. En déduire le résultat souhaité.