Université Claude Bernard M1 Probabilités — Mathématiques

Feuille d'exercices numéro 1

Formalisme des probabilités, Lois des grands nombres et lemmes de Borel–Cantelli

Exercice 1 Fonctions de répartition

Soit X une variable aléatoire et F sa fonction de répartition.

1. Montrer que (a) F est croissante. (b) F tend vers 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$. (c) F est continue à droite.
2. Montrer que F admet une limite à gauche en tout point. A quelle condition est-ce que la fonction F est continue en un point x donné ? Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de F est au plus dénombrable.
3. Réciproquement, soit $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ une fonction vérifiant les conditions (a),(b) et (c) ci-dessus. Montrer qu'il existe une variable aléatoire X dont F est la fonction de répartition.
   Indication : *on peut définir* X *sur* $(]0, 1[, \text{Lebesgue})$ *en posant* $X(\omega) = \sup\{y : F(y) < \omega\}$.

Exercice 2 Lemme de Doob–Dynkin

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire, et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction $\sigma(X)$-mesurable. Montrer qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne telle que $Y = f(X)$.

Indication : *on pourra commencer par le cas où* Y *est étagée et utiliser le fait que toute fonction mesurable positive est limite croissante d'une suite de fonctions étagées.*

Exercice 3 Lois de Poisson Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres λ et μ. Quelle est la loi de $X + Y$?

Exercice 4 Des variables aléatoires non corrélées

Soit $\Omega = [0, 1]$ muni de la tribu des boréliens et de la mesure de Lebesgue. On définit une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$ par

$$X_n(\omega) = \sin(2\pi n\omega).$$

Montrer que ces variables aléatoires sont non-corrélées et de même loi, mais que pour tous $i, j \in \mathbb{N}^*$, X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

Exercice 5 La mesure de Lebesgue vaut cher : une infinité de pièces de monnaie !

1. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre 1/2. Quelle est la loi de la variable aléatoire
$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{2^n} \quad ?$$
2. Réciproquement, soit $\Omega = [0, 1]$ muni de la tribu des boréliens et de la mesure de Lebesgue. On définit une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\geqslant 1}$ sur (Ω, λ) en posant
$$X_k(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lfloor 2^k\omega \rfloor \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   Montrer que les variables $(X_k)_{k\geqslant 1}$ sont i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre 1/2.
3. En déduire qu'il est possible de définir sur $([0, 1], \lambda)$ une infinité de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$.
   Indication : *$\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$ sont en bijection.*
4. En déduire que, étant donnée une suite (μ_n) de mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$, il est possible de définir sur $([0, 1], \lambda)$ une suite (X_n) de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout n, X_n ait pour loi μ_n.

Exercice 6 Théorème d'approximation de Weierstrass.

On va donner une preuve probabiliste du théorème de Weierstrass : toute fonction continue $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est la limite uniforme d'une suite de polynômes. Pour cela, soit $X_{n,p}$ est une variable aléatoire de loi binomiale $B(n, p)$, $p \in [0, 1]$, on définit la suite (f_n) des polynômes de Bernstein associés à f en posant :

$$f_n(p) = \mathbf{E} f\left(\frac{X_{n,p}}{n}\right).$$

1. Vérifier que f_n est un polynôme.
2. Soit $\varepsilon > 0$. On rappelle qu'une fonction continue sur un compact est uniformément continue :
$$\exists \delta > 0 \text{ t.q. } |x-y| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon.$$
Montrer que, en posant $M = \sup |f|$, pour tout $0 \leqslant p \leqslant 1$,
$$|f_n(p) - f(p)| \leqslant \mathbf{E}\left| f\left(\frac{X_{n,p}}{n}\right) - f(p)\right| \leqslant \varepsilon + 2M\mathbf{P}\left(\left|\frac{X_{n,p}}{n} - p\right| > \delta\right).$$
3. Montrer que pour tout $\delta > 0$, $\mathbf{P}\left(\left|\frac{X_{n,p}}{n} - p\right| > \delta\right) \leqslant \frac{1}{4n\delta^2}$, et conclure.

Exercice 7 Records.

Combien de fois par siècle entend-on dire : « Cet été, on a battu le record de température à Lyon » ? Pour répondre à cette question, soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. On suppose que la loi de X_1 est une loi continue (i.e. elle admet une densité) ; X_n représente la température maximale au cours de l'année n.

1. Montrer que l'évènement $A =$ « Il existe des entiers $i \neq j$ tels que $X_i = X_j$ » a probabilité 0.
2. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $\omega \in \Omega \setminus A$, on définit $\sigma_n = \sigma_n(\omega)$ comme l'unique permutation $\sigma_n \in \mathfrak{S}_n$ telle que
$$X_{\sigma_n(1)} < X_{\sigma_n(2)} < \cdots < X_{\sigma_n(n)}.$$
Montrer que σ suit la loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$.
3. Soit A_n l'évènement « le temps n est un temps de record », c'est-à-dire « Pour tout $k < n$, $X_k < X_n$ ». Montrer que les évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont indépendants et que $\mathbf{P}(A_n) = 1/n$.
4. Montrer que, presque sûrement, il existe une infinité de temps de record.

Exercice 8 Convergences d'une suite de variables de Bernoulli Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, telles que X_n suive une loi de Bernoulli de paramètre p_n. Montrer que (X_n) converge vers 0 en probabilité si et seulement si $\lim p_n = 0$ et que (X_n) converge vers 0 presque sûrement si et seulement si $\sum p_n < +\infty$.

Exercice 9 La convergence presque sûre n'est pas métrisable

Soient $(X_n), X$ des variables aléatoires de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si (X_n) converge vers X en probabilité, alors il existe une sous-suite $X_{\sigma(n)}$ qui converge presque sûrement vers X.
2. Réciproquement, on suppose que de toute sous-suite $(X_{\sigma(n)})$ de (X_n) on peut extraire une sous-sous-suite $(X_{\sigma(\tau(n))})$ qui converge vers X presque sûrement. Montrer que (X_n) converge vers X en probabilité.
3. Montrer qu'il n'existe pas de distance d sur l'ensemble des variables aléatoires telle que $d(X_n, X) \to 0$ si et seulement si (X_n) converge vers X presque sûrement.

Exercice 10 La convergence en probabilité est métrisable

Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des classes d'équivalence de variables aléatoires de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ dans $\mathbb{R}$ pour la relation d'égalité presque partout. On définit une distance sur $\mathscr{E}$ en posant
$$d(X,Y) = \mathbf{E}\min(1, |X-Y|).$$

1. Montrer que cela définit bien une distance.
2. Soient $X, (X_n)$ des variables aléatoires. Montrer que (X_n) converge en probabilité vers X si et seulement si $\lim_{n\to\infty} d(X_n, X) = 0$.
3. Montrer que $\mathscr{E}$ est complet pour cette distance.

Exercice 11 Théorème du renouvellement

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d., avec $X_1 > 0$ p.s. et $\mathbf{E}X_1 < +\infty$. On peut penser à X_n comme la durée de vie d'une ampoule. On pose $T_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $N_t = \sup\{n \text{ t.q. } T_n \leqslant t\}$ est alors le nombre de fois qu'il a fallu changer l'ampoule entre le temps 0 et le temps t. Montrer que, presque sûrement,
$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mathbf{E}X_1}.$$
Indication : *on commencera par observer que l'évènement « $\lim_{t\to\infty} N_t = \infty$ » a probabilité* 1.