Université Claude Bernard — Mathématiques

M1 Probabilités

Feuille d'exercices numéro 2

Autour du théorème central limite

Exercice 1 Théorème de Portmanteau

Soient $(X_n), X$ des variables aléatoires. Montrer l'équivalence entre les 6 conditions suivantes

1. Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée, on a $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}f(X_n) = \mathbf{E}f(X)$.
2. Pour tout ouvert $G \subset \mathbb{R}$, on a
$$\liminf_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n \in G) \geqslant \mathbf{P}(X \in G).$$
3. Pour tout fermé $F \subset \mathbb{R}$, on a
$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n \in F) \leqslant \mathbf{P}(X \in F).$$
4. Pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{P}(X \in \partial A) = 0$, on a
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n \in A) = \mathbf{P}(X \in A).$$
5. La fonction de répartition F_n de X_n converge vers celle de X notée F en tout point x de continuité de F.
6. Il existe des variables aléatoires Y_n, Y respectivement de même distributions que X_n et X tel que Y_n converge presque sûrement vers Y.

Exercice 2 Convergence faible dans le cas discret

Soient $(X_n), X$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer l'équivalence entre les énoncés suivants :

1. La suite (X_n) converge faiblement vers X.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = k) = \mathbf{P}(X = k).$$

Exercice 3 Distance de Lévy

Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des lois de probabilités sur $\mathbb{R}$. Si $\mu \in \mathscr{P}$, on note $F_\mu(t) = \mu(]-\infty, t])$ la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi μ. On définit une distance sur $\mathscr{P}$ en posant

$$d(\mu, \nu) = \inf\{\varepsilon > 0 \text{ t.q. } F_\mu(x - \varepsilon) - \varepsilon \leqslant F_\nu(x) \leqslant F_\mu(x + \varepsilon) + \varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

1. Montrer que d est bien une distance sur $\mathscr{P}$.
2. Soit $(X_n), X$ des variables aléatoires de lois respectives μ_n, μ. Montrer que (X_n) converge faiblement vers X si et seulement si $\lim d(\mu_n, \mu) = 0$.

Exercice 4 Piper un dé ?

Est-il possible de truquer un dé à 6 faces de telle sorte que, en lançant (indépendamment) deux fois ce dé, la somme des deux lancers suive la loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$?

Exercice 5 Calculs de fonctions caractéristiques

Calculer la fonction caractéristique de la variable aléatoire X dans les cas suivants

1. $\mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(X = -1) = 1/2$.
2. X suit une loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$.
3. X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
4. X suit une loi de Cauchy de paramètre $c > 0$, c'est-à-dire une loi donnée par la densité
$$\frac{c}{\pi(c^2 + x^2)}.$$

Exercice 6 Loi de Cauchy

1. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes i.i.d. suivant la loi de Cauchy de paramètre 1, et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Quelle est la loi de S_n/n ?
2. Le résultat de la question précédente semble contredire la loi des grands nombres. Où est l'erreur ?
3. Soient Z, T deux variables aléatoires i.i.d. de loi gaussienne $N(0,1)$. Montrer que Z/T suit une loi de Cauchy de paramètre 1.
4. Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi, avec une loi symétrique et ayant la propriété que pour tous nombres positifs α, β, les variables aléatoires $\alpha X + \beta Y$ et $(\alpha+\beta)X$ ont même loi. Montrer que la loi commune de X et de Y est une loi de Cauchy.

Exercice 7 Une caractérisation de la loi gaussienne

Soient X, Y deux variables aléatoires i.i.d. L^2 ayant la propriété que $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ a même loi que X. On pose $\sigma^2 = \mathbf{Var}(X)$.

1. Vérifier que la loi gaussienne $N(0,\sigma^2)$ a la propriété requise. Le but de l'exercice est de montrer que c'est la seule loi ayant cette propriété.
2. Montrer que $\mathbf{E}X = 0$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $X_1, \ldots, X_{2^n}$ sont des variables aléatoires i.i.d. de même loi que X, alors la variable aléatoire
$$\frac{1}{2^{n/2}}\left(X_1 + \cdots + X_{2^n}\right)$$
a même loi que X.
4. Conclure à l'aide du théorème central limite.

Exercice 8 Tension

1. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires qui converge faiblement. Montrer que cette suite est tendue, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K > 0$ tel que pour tout n, $\mathbf{P}(|X_n| \geqslant K) \leqslant \varepsilon$.
2. Montrer que si (X_n) est une suite tendue de variables aléatoires et si (Y_n) tend vers 0 en probabilité, alors $(X_n Y_n)$ tend vers 0 en probabilité.

Exercice 9 Auto-renormalisation

Soient (X_n) des variables aléatoires i.i.d. L^2, avec $\mathbf{E}X_1 = 0$ et $\mathbf{Var}(X_1) > 0$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. On veut montrer que la suite de variables aléatoires
$$\frac{S_n}{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)^{1/2}}$$
converge faiblement vers une variable aléatoire de loi gaussienne $N(0,1)$.

1. Montrer que la suite $\frac{\sigma\sqrt{n}}{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)^{1/2}}$ converge presque sûrement vers 1.
2. Conclure à l'aide de l'exercice précédent.

Exercice 10 Une application non probabiliste du théorème central limite

Calculer, à l'aide du théorème central limite, la limite de la suite (A_n) définie par
$$A_n = e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$

Exercice 11 Indépendance et fonctions caractéristiques

Soit $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur aléatoire. Montrer que les variables aléatoires $(X_1, \ldots, X_d)$ sont indépendantes si et seulement si l'égalité suivante est vraie pour tout $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^d$
$$\Phi_{\vec{X}}(\vec{t}) = \prod_{j=1}^{d} \Phi_{X_j}(t_j).$$