Université Claude Bernard Mathématiques
M1 Probabilités

Feuille d'exercices numéro 3
Espérance et loi conditionnelles.

Dans toute la feuille d'exercices, on travaille sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbf{P})$ et sauf mention contraire, les variables aléatoires sont supposées être définies sur cet espace. Dans toute (in)égalité faisant intervenir l'espérance conditionnelle, la mention « presque sûrement» est sous-entendue.

Exercice 1 Lois sans mémoire

1. Soit X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$. On note $a = P(X = 0)$. Calculer la loi de X en supposant que $P(X \geqslant m + n | X \geqslant m) = P(X \geqslant n)$.
2. Soit Y une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ. Montrer que $P(Y \geqslant t + s | Y > t) = P(Y > s)$. Montrer que ceci caractérise la loi exponentielle parmi les lois à densité sur $\mathbb{R}_+$ et que $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} P(t < Y < t + h | X > t) = \theta$.

Exercice 2 Lois Conditionnelles

On appelle noyau de transition $K : \mathbb{R} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ une application telle que $y \mapsto K(y, B)$ est mesurable et $K(y, .) =: K^y$ est une mesure de probabilité pour tout y.

1. Soit $(X_1, ..., X_n, Y)$ v.a. montrer qu'il existe une noyau de transition K (K^y notée $Loi(X_1, ..., X_n | Y = y)$) tel que pour tout ϕ borélienne mesurable
$$E(\phi(X_1, ..., X_n)|Y) = \int \phi(x_1, ..., x_n) dK^Y(x_1, ..., x_n).$$
(indication : se ramener aux fonctions continues et prendre une famille dénonbrable dense)
2. Montrer que si h mesurable $Loi(h(X)|X = x) = \delta_{\{h(x)\}}$.
3. Si X et Y sont indépendantes, montrer que $Loi(h(X, Y)|Y = y) = Loi(h(X, y))$.
4. Si (X, Y) a une densité f, montrer que $Loi(X|Y = y)$ a une densité $f(x, y)/ \int_{\mathbb{R}} f(x, y)dx$.

Exercice 3 Processus de Poisson

1. Soit $(X_1, ..., X_n)$ i.i.d de loi uniforme sur $[0, t]$. On note $X_{1,n} \leqslant ... \leqslant X_{n,n}$ le réarrangement croissant (appelée n-statistique d'ordre sur $[0, t]$). Donner la loi de $(X_{1,n} \leqslant ... \leqslant X_{n,n})$.
2. Montrer que la loi conditionelle $Loi(X_{1,n} \leqslant ... \leqslant X_{n,n} | X_{n,n} = x)$ est la loi d'une $(n - 1)$ statistique d'ordre sur $[0, x]$.
3. Montrer que pour $0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant ... \leqslant t_p \leqslant t$ et $0 = k_0 \leqslant k_1 \leqslant ... \leqslant k_p = n$
$$P(\forall j = 0, ..., p - 1, \forall i = k_j + 1, ..., k_{j+1} X_{i,n} \in]t_j, t_j + 1]) = \frac{n!}{t^n} \prod_{j=0}^{p-1} \frac{(t_{j+1} - t_j)^{k_{j+1}-k_j}}{(k_{j+1} - k_j)!}.$$
4. Soit T_k i.i.d. de loi exponentielles de paramètre λ. Soit $S_n := T_1 + ... + T_n$. Montrer que la loi conditionelle de $(S_1, ..., S_n)$ sachant $S_{n+1} = s$ est une n-statistique d'ordre sur $[0, s]$.
5. Soit $N_t = \sum_n 1_{[0,t]}(S_n)$. Montrer que, pour $0 \leqslant t_1 \leqslant ... \leqslant t_n$ les variables $N_{t_{i+1}} - N_{t_i}$ sont indépendantes et suivent la loi de Poisson de paramètre $\lambda(t_{i+1} - t_i)$

Exercice 4 Inégalité de Markov conditionnelle

Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_0$ une sous-tribu. Pour $A \in \mathcal{F}_0$, on définit la probabilité conditionnelle de A sachant $\mathcal{F}$ par la formule $\mathbf{P}[A|\mathcal{F}] = \mathbf{E}[\mathbf{1}_A|\mathcal{F}]$. Montrer l'inégalité suivante pour toute variable aléatoire X positive et tout $t > 0$, $\mathbf{P}[X \geqslant t|\mathcal{F}] \leqslant \frac{1}{t} \mathbf{E}[X|\mathcal{F}]$.

Exercice 5 Inégalité de Cauchy–Schwartz conditionnelle

Soit $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}_0$ une sous-tribu. Montrer que pour toutes variables aléatoires X, Y dans L^2, on a
$$|\mathbf{E}[XY|\mathcal{G}]| \leqslant \left(\mathbf{E}[X^2|\mathcal{G}]\right)^{1/2} \left(\mathbf{E}[Y^2|\mathcal{G}]\right)^{1/2}.$$

Exercice 6 Deux espérances conditionnelles ne commutent pas

Donner un exemple (par exemple avec $\Omega = \{a, b, c\}$) d'une variable aléatoire X et de deux sous-tribus $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ pour lesquelles

$$\mathbf{E}\left[\mathbf{E}[X|\mathcal{F}_1]|\mathcal{F}_2\right] \neq \mathbf{E}\left[\mathbf{E}[X|\mathcal{F}_2]|\mathcal{F}_1\right].$$

Exercice 7 Espérance conditionnelle et indépendance

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que X, Y et XY soient dans L^1. Montrer que (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) et montrer que les implications réciproques ne sont pas vraies.

(1) X et Y sont indépendantes. (2) $\mathbf{E}[Y|X] = \mathbf{E}\, Y$. (3) $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y)$.

Exercice 8

Soient $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ deux sous-tribus de $\mathcal{F}_0$, et X une variable aléatoire dans L^2. Montrer que

$$\mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}[X|\mathcal{G}])^2\right) = \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}[X|\mathcal{F}])^2\right) + \mathbf{E}\left((\mathbf{E}[X|\mathcal{F}] - \mathbf{E}[X|\mathcal{G}])^2\right)$$

Exercice 9 Somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires

Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. d'espérance μ et de variance $\sigma^2 < +\infty$. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante de (Y_n) et telle que $\mathbf{E}\, N < +\infty$. On pose $X = Y_1 + \cdots + Y_N$.

1. Calculer $\mathbf{E}[X|N]$.
2. Calculer $\mathbf{E}\, X$.
3. Montrer la formule suivante : $\mathbf{Var}\, X = \sigma^2\, \mathbf{E}\, N + \mu^2\, \mathbf{Var}\, N$. (Pour se rappeler la formule on peut penser aux deux cas particuliers où Y_1 ou N est constante).

Exercice 10

Soit $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}_0$ une sous-tribu, et X, Y deux variables aléatoires dans L^2 telles que $\mathbf{E}\, X^2 = \mathbf{E}\, Y^2$ et $X = \mathbf{E}[Y|\mathcal{G}]$. Montrer que $X = Y$.

Exercice 11

Soit $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}_0$ une sous-tribu, et soit Y une v.a. dans L^1 telle que $Loi(\mathbf{E}[Y|\mathcal{G}]) = Loi(Y)$. Montrer que $Y = \mathbf{E}[Y|\mathcal{G}]$.

Exercice 12

Soient X, Y deux v.a. dans L^1 avec $\mathbf{E}[X|Y] = Y$ et $\mathbf{E}[Y|X] = X$. Montrer que $X = Y$.

Exercice 13 Espérance conditionnelle et indépendance

Soit X dans L^1.$\mathcal{G}, \mathcal{F}$ deux sous-tribus de $\mathcal{F}_0$ tel que $\sigma(X) \vee \mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ soient indépendantes. Montrer que $\mathbf{E}[X|\mathcal{G} \vee \mathcal{F}] = \mathbf{E}[X|\mathcal{F}]$

Exercice 14 Sur la voie de la loi forte des grands nombres

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. dans L^1 et $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$.

1. Montrer que, pour $i \in [1, n]$: $\mathbf{E}[X_i|\ \sigma(S_n)] = \mathbf{E}[X_1|\ \sigma(S_n)]$.
2. En déduire $\mathbf{E}[X_1|\ \sigma(S_n)]$ puis $\mathbf{E}[X_1|\ \mathcal{F}_{-n}]$ avec $\mathcal{F}_{-n} = \sigma(S_{n+j}, j \in \mathbb{N})$.

Exercice 15 Convergence des martingales rétrogrades

Soit $\mathcal{F}_0 \supset \mathcal{F}_{-1} \supset \mathcal{F}_{-2} \supset ...$ une suite de tribus (croissante indéxée par les entiers négatifs). Soit $\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{-n}$.

Soit $p \in [1, \infty[$ et X une variable aléatoire dans L^p. Soit $X_n = \mathbf{E}[X|\mathcal{F}_{-n}]$.

1. Montrer que X_n converge dans L^p vers $\mathbf{E}[X|\mathcal{F}_{-\infty}]$. (on pourra commencer par le cas $p = 2$, puis prendre X dans $L^p \cap L^2$ et raisonner par densité).
2. Pour $n, k \in \mathbb{N}$ fixés, soit $T = \inf\{0 \geqslant m \geqslant -(n+k) \mid |X_{-m}| > t\}$, vérifier que T est un temps d'arrêt, c'est-à- dire $\{T = -n\} \in \mathcal{F}_{-n}$.
3. Montrer que, pour $n, k, t > 0$:
$$t\mathbf{P}(\sup_{n \leqslant m \leqslant n+k} |X_m| > t) \leqslant \mathbf{E}(|X_n| 1_{\{\sup_{n \leqslant m \leqslant n+k} |X_m| > t\}})$$
4. Verifier que
$$t\mathbf{P}(\sup_{m \geqslant n} |X_m| > t) \leqslant \mathbf{E}[|X_n|]$$
En déduire que X_n converge presque sûrement vers $\mathbf{E}[X|\mathcal{F}_{-\infty}]$.
5. En utilisant l'exercice précédent, en déduire la loi forte des grands nombres.