Feuille d'exercices numéro 4
Chaînes de Markov, Temps d'arrêt.

Quand on considère une chaîne de Markov, sauf mention contraire on suppose qu'elle est définie sur l'espace canonique.

Exercice 1
Soient S et T deux temps d'arrêt. Montrer que $S \wedge T = \min(S,T)$ et $S \vee T = \max(S,T)$ sont aussi des temps d'arrêt.

Exercice 2
Soient S et T deux temps d'arrêt. Est-ce que $S+T$ est un temps d'arrêt ? Donner une preuve ou un contre-exemple.

Exercice 3
Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires telle que, pour tout n, Y_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable. Soit T un temps d'arrêt fini presque sûrement. Montrer que $Y_T \in \mathcal{F}_T$.

Exercice 4
Soient S et T deux temps d'arrêt tels que $S \leqslant T$. Montrer que $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

Exercice 5
Soient T_1 et T_2 deux temps d'arrêt tels que $T_1 \leqslant T_2$, et $A \in \mathcal{F}_{T_1}$. On définit T par

$$T(\omega) = \begin{cases} T_1(\omega) & \text{si } \omega \in A \\ T_2(\omega) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que T est un temps d'arrêt.

Exercice 6 Soit $p \in]0,1[$, et considérons la chaîne de Markov d'espace d'états $\mathbb{Z}$ et de matrice de transition

$$P(i,j) = \begin{cases} p & \text{si } j = i+1 \\ 1-p & \text{si } j = i-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette chaîne est-elle irréductible ? Classifier les états.

Exercice 7 On considère la chaîne de Markov sur l'ensemble $\{1,2,\ldots,10\}$ donnée par la matrice de transition suivante (les éléments nuls ne sont pas indiqués). Classifier les états.

$Q =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1							0.5		0.5	
2		0.9		0.1						
3					0.2			0.8		
4		1								
5		0.2	0.2	0.2	0.2					0.2
6	0.4				0.6					
7	0.1								0.9	
8			1							
9							0.5		0.5	
10										1

Exercice 8
Soit $S = \{1,\ldots,6\}$. Compléter la matrice suivante pour qu'elle soit une matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} \cdot & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 7/8 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & \cdot & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & \cdot \end{bmatrix}.$$

Classifier les états et montrer qu'il existe deux ensembles fermés irréductibles non vides C_1, C_2. Pour $i = 1, 2$ et $x \in S$, calculer

$$\mathbf{P}_x(X_n \in C_i \text{ pour tout } n \text{ assez grand}).$$

Exercice 9 Sur l'ensemble $S = \{0, 1, \dots, n\}$ on considère la chaîne de Markov de matrice de transition P donnée pour $0 \leqslant x \leqslant n-1$ par

$$P(x,y) = \begin{cases} p & \text{si } y = x+1 \\ 1-p & \text{si } y = 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

l'état n étant absorbant (i.e. $P(n,x) = \delta_{n,x}$). Classifier les états de cette chaîne. Soit τ le temps d'atteinte de l'état n. Quelle est la valeur de $\mathbf{E}_x \tau$?

Application : combien de lancers d'un dé à 6 faces faut-il faire en moyenne pour voir apparaître 4 fois consécutivement le nombre 6 ?

Exercice 10 Classifiez, en fonction des nombres $(p_k), (q_k)$, les états de la chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ dont la matrice de transition est donnée par

$$\begin{array}{lll} Q(0,0) = \alpha, & Q(0,1) = 1-\alpha, & 0 < \alpha < 1 \\ Q(1,2) = \beta, & Q(1,3) = 1-\beta, & 0 < \beta < 1 \\ Q(k,1) = p_k, & Q(k,k+2) = q_k = 1-p_k, & 0 < p_k < 1, k \geqslant 2. \end{array}$$

Exercice 11 Soit la chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ de matrice de transition

$$P(0,0) = 1, \qquad P(k,m) = e^{-k}\frac{k^m}{m!}, k \geqslant 1, m \geqslant 0.$$

Autrement dit, $P(k,\cdot)$ suit une loi de Poisson de paramétre k.

1. Classifier les états.
2. Soit (X_n) la chaîne de Markov sur l'espace canonique. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{N}$, (X_n) est une martingale pour la mesure $\mathbf{P}_x$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{N}$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\mathbf{P}_x$-presque sûrement vers 0.

Exercice 12

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov associée à une matrice de transition P sur un ensemble d'états S.

1. Soit $r \in \mathbb{N}$. Est-ce que $(X_{r+n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov ?
2. Est-ce que $(X_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov ?
3. Est-ce que $((X_n, X_{n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov ?

En cas de réponse positive, on précisera quelle est la matrice de transition.

Exercice 13

Soit une chaîne de Markov assiociée à une matrice de transition P sur un ensemble d'états S. On suppose qu'il existe un état absorbant s (i.e. $P(s,s) = 1$) et que pour tout $x \in S, x \rightsquigarrow s$. Classifier les états.

Exercice 14

On considère la chaîne de Markov suivante. Soit $N \in \mathbb{N}$, et P la matrice de transition sur $S = \{0, \dots, N\}$ par

$$P(i,j) = \binom{N}{j}\left(\frac{i}{N}\right)^j \left(1 - \frac{i}{N}\right)^{N-j}.$$

1. Que vaut $P(0,j)$ é $P(N,j)$ é Classifier les états.
2. Montrer que pout tout $x \in S$, la suite (X_n), définie sur l'espace canonique $\Omega = S^{\mathbb{N}}$, est une martingale par rapport é la mesure de probabilité $\mathbf{P}_x$. Montrer qu'elle converge presque sérement vers une variable aléatoire dont on déterminera la loi.