Université Claude Bernard — Mathématiques
M1 Probabilités

Feuille d'exercices numéro 5
chaînes de Markov : mesures invariantes

Exercice 1 On considère la chaîne de Markov sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ donnée par la matrice de transition suivante.

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Montrer que cette chaîne est irréductible récurrente.
2. Calculer la mesure de probabilité invariante.

Exercice 2 Marche aléatoire sur un graphe

Un graphe fini est donné par un couple (S, A), où S est un ensemble fini (l'ensemble des sommets du graphe) et A (l'ensemble des arêtes du graphe) est un sous-ensemble de $\mathscr{P}_2(S)$ (ici $\mathscr{P}_2(S)$ désigne l'ensemble des parties de S contenant exactement deux éléments).

Le degré d'un sommet $s \in S$ est défini comme le nombre d'arêtes auquel il appartient

$$d_s = \text{card}\{a \in A \text{ t.q. } s \in a\}.$$

On définit une matrice de transition P sur l'ensemble d'états S en posant

$$P(s,t) = \begin{cases} 1/d_s & \text{si } \{s,t\} \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On suppose que la chaîne de Markov associée est irréductible. Quelle est la mesure de probabilité invariante μ é (**Indication** : exprimer $\mu(s)$ en fonction de d_s.)

Application : une piéce d'échecs part du coin d'un échiquier (de 8×8 cases) et se déplace au hasard (à chaque étape, elle effectue un mouvement choisi selon la loi uniforme sur l'ensemble des mouvements possibles). Quel est le nombre moyen de déplacements avant qu'elle retourne à sa case de départ

1. si la piéce est un roi ?
2. si la piéce est une reine ?
3. si la piéce est un cavalier ?
4. si la piéce est un fou ?
5. si la piéce est une tour ?

Exercice 3

On construit par récurrence une suite de polygones convexes (P_n) de la manière suivante : on choisit au hasard deux côtés distincts du polygone P_{n-1} (selon la loi uniforme) et on relie leurs milieux par une arête. Le polygone P_n est l'un deux polygones ainsi délimités (chacun est choisi avec probabilité 1/2). Soit (X_n) le nombre de côtés du polygone P_n, on pose $Y_n = X_n - 3$. Montrer que (Y_n) est une chaîne de Markov irréductible (pour une matrice de transition à préciser) et que la loi de Poisson de paramètre 1 est la mesure de probabilité invariante pour cette chaîne.

Exercice 4

On considère une cavité dans laquelle des particules physiques entrent puis se désintègrent au bout d'une certaine durée. On suppose qu'à l'instant n, un nombre Y_n de particules entrent dans la cavité, où Y_n sont des variables aléatoires i.i.d. de loi de Poisson de paramètre λ. On considère que la durée de vie de chaque particule suit une variable aléatoire géométrique de paramètre p, et que toutes ces variables aléatoires sont indépendantes. Soit X_n le nombre de particules dans la chambre à l'instant n. Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov et calculer sa mesure invariante.

Exercice 5 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la chaîne de Markov canonique sur un espace dénombrable E, de matrice de transition P. Soit F un sous-ensemble non-vide de E. On pose $T_F = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid X_n \in F\}$.

1. Montrer que pour toute fonction h positive bornée définie sur F, la fonction g, définie, pour tout $x \in E$, par : $g(x) = \mathbf{E}_x[h(X_{T_F})1_{\{T_F<\infty\}}]$ est solution du problème suivant :$\forall x \in F^c, g(x) = Pg(x)$, $\forall x \in F, g(x) = h(x)$.

   On va montrer que g est la solution positive minimale de ce problème
2. Soit f une autre solution positive de ce problème. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$ $f(x) = \mathbf{E}_x[f(X_{n\wedge T_F})]$ En déduire que $f \geqslant g$

Exercice 6 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la chaîne de Markov canonique sur un espace dénombrable E, de matrice de transition P. On suppose que $P(x,x) < 1$ pour tout $x \in E$. On définit $\tau = \inf\{n \geqslant 1 \mid X_n \neq X_0\}$. et on note $\mathcal{F}_n$ la filtration canonique.

1. Montrer que τ est un temps d'arrêt et que pour tout $x \in E$ τ est fini $\mathbf{P}_x$ p.s. Calculer les lois de τ et X_τ sous $\mathbf{P}_x$.
2. On définit une suite de v.a. par $\tau_0 = 0, \tau_1 = \tau$ et $\tau_k = \inf\{n \geqslant \tau_{k-1} \mid X_n \neq X_{\tau_{k-1}}\}$ pour $k \geqslant 2$. Montrer que (τ_k) est une suite de temps d'arrêt et que τ_k est fini $\mathbf{P}_x$-p.s. pour tout $x \in E$ et tout $k \geqslant 0$.
3. Pour $n \geqslant 0$, on pose $Y_n = X_{\tau_n}$. Montrer que $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition.
4. On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est irréductible et récurrente avec une mesure invariante μ. Montrer que $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ est aussi irréductible et récurrente et que si $\nu(x) = (1-P(x,x))\mu(x)$, alors ν est une mesure invariante pour $(Y_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 7 Chaîne de naissance et de mort

Soit Q la matrice de transition sur $\mathbb{N}$ donnée par :

$$\begin{array}{lllll} Q(0,0) = r_0, & Q(0,1) = p_0, & & p_0 > 0, & p_0 + r_0 = 1 \\ Q(i,i-1) = q_i, & Q(i,i) = r_i & Q(i,i+1) = p_i & p_i, q_i > 0, & p_i + r_i + q_i = 1, \forall i \geqslant 1 \end{array}$$

Soit (X_n) la chaîne de Marov canonique de transition Q.

1. Montrer que X est irréductible/
2. Montrer que X admet une mesure réversible ζ avec $\zeta(0) = 1$ et déterminer ζ. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que X admette une mesure de probabilité invariante.
3. On considère le cas où $p_i = p > 0$, $q_i = q > 0$ pour tout $i \geqslant 1$ avec $p < q$. Calculer $E_i(\tau_i)$ pour tout $i \geqslant 0$ (τ_i désigne le premier temps de retour en i)

Exercice 8 Montrer que pour toute chaîne récurrente irréductible, tous les points ont la même période.

Exercice 9 Algorithme de Metropolis Soit P une matrice de transition symétrique et irréductible sur E. Soit π une probabilité telle que $\pi(x) > 0, \forall x \in E$.

1. Vérifier que l'on définit une nouvelle matrice de transition sur E par $Q(x,y) = P(x,y)\left(\frac{\pi(y)}{\pi(x)} \wedge 1\right)$ si $x \neq y$, $Q(x,x) = 1 - \sum_{z\neq x} Q(x,z)$. Puis montrer que π est réversible pour Q.
2. Montrer que Q est irréductible.
3. On suppose que π n'est pas la loi uniforme sur E (i.e. $Q \neq P$). On pose $M = \{x \in E \mid \pi(x) = \max_{y\in E} \pi(y)\}$. Montrer qu'il existe $x_0 \in M$ tel que $P(x_0, y) > 0$ pour un certain $y \notin M$. En déduire que $Q(x_0, x_0) > 0$.

   Remarque : on a montré en particulier que Q est apériodique. Cette méthode permet de construire une chaîne de Markov convergeant vers π en loi pour toute loi π donnée sur un ensemble fini.

Exercice 10 On considère d boules numérotées de 1 à $d \geqslant 2$, réparties dans deux urnes A et B. On tire i au hasard entre 1 et d puis on tire au hasard l'urne dans laquelle on replace la boule i. Tous les tirages sont supposés uniformes et indépendants. Soit X_n le nombre de boule dans l'urne A à l'instant n.

1. Déterminer la matrice de transition Q de X et montrer qu'elle est irréductible, récurrente positive et apériodique.
2. Montrer qu'il existe deux constantes α et β tel que pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$ $\sum_{j=0}^{d} jQ(i,j) = \alpha i + \beta$. En déduire la valeur de $\mathbf{E}_i(X_n)$ et sa limite quand $n \to \infty$.
3. On suppose que X_0 suit la loi binomiale de paramètres d et $1/2$. Déterminer la loi de X_1.
4. Trouver la probabilité invariante de la chaîne. En déduire $\mathbf{E}_d(\tau_d)$ et $\lim_{n\to\infty} Q^n(i,j)$, pour tous $0 \leqslant i,j \leqslant d$.