Université Claude Bernard — Mathématiques
M1 Probabilités

Feuille d'exercices numéro 6
Chaînes de Markov, Marches aléatoires et temps d'arrêt.

Exercice 1
Soit X_n une chaîne de Markov définie sur son espace canonique pour un espace d'état S.
On la suppose irréductible et récurrente positive. On note $T_x = \inf\{n \geqslant 0,\ X_n = x\}$. On pose

$$d(x,y) = E_x(T_y) + E_y(T_x).$$

Montrer que d définit une distance sur S.

Exercice 2 Marche aléatoire sur $\mathbf{Z}$.
Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbf{Z}$. On considère une marche aléatoire S_n sur $\mathbf{Z}$ dont les pas sont i.i.d. de loi μ. C'est la chaîne de Markov associée à la matrice de transition sur $\mathbf{Z}$ définie par $Q(x,y) = \mu(y-x)$.

1. Montrer que les états de la chaîne sont soit tous récurrents, soit tous transitoires. Soit ξ une v.a. de loi μ. On suppose que $\mathbf{E}|\xi| < +\infty$ et on pose $m = \mathbf{E}\xi$.
2. Montrer que si $m \neq 0$, tous les états sont transitoires.
3. (*) On suppose que $m = 0$. Montrer que tous les états sont récurrents. On raisonne par l'absurde. Montrer que pour tout x $E_0(N_x) \leqslant C$ pour une constante que l'on précisera. (On pourra borner ensuite supérieurement et inférieurement $\sum_{|x|\leqslant n} E_0(N_x)$ en utilisant la loi des grands nombres pour la borne inférieure et obtenir une contradiction).
4. En déduire que si $m = 0$ et $\mu \neq \delta_0$, $P(\limsup(S_n) = \infty \ et\ \liminf(S_n) = -\infty) = 1$.
5. Montrer que la chaîne est irréductible si et seulement si $\mathrm{PGCD}(\{n \in \mathbf{Z} \text{ t.q. } \mu(n) > 0\}) = 1$.

Exercice 3 Comportement assymptotique
Soit X_n une chaîne de Markov récurrente irréductible de mesure invariante μ. Soit f positive avec $\int f d\mu < \infty$. On définit par récurrence $T_0 = 0$ et $T_{n+1} = \inf\{k > T_n\ : X_k = x\}$.

1. Montrer que $Z_k(f) = \sum_{n=T_k}^{T_{k+1}-1} f(X_n)$ sont i.i.d.
2. En appliquant la loi des grands nombres montrer que l'on a la convergence p.s. suivante
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(X_k) \to \int f d\mu.$$
3. En déduire la limite de $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} 1_{\{x\}}(X_k)$.

Dans toute la suite de cette feuille d'exercices, (X_n) désigne une suite de variables aléatoires i.i.d. et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. On note $(\mathcal{F}_n)$ la filtration associée à (X_n), c'est-à-dire $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

Exercice 4 Équation de Wald
On suppose que $\mathbf{E}|X_1| < \infty$. On veut montrer que si T est un temps d'arrêt tel que $\mathbf{E}T < +\infty$, alors

$$\mathbf{E}S_T = \mathbf{E}X_1\mathbf{E}T.$$

1. Montrer le cas $X_1 \geqslant 0$.
2. Conclure.

Exercice 5 On ajoute des nombres dans $[0,1]$ jusqu'à dépasser 1.
On suppose que X_n suit la loi uniforme sur $[0,1]$. Soit le temps d'arrêt $T = \inf\{n \text{ t.q. } S_n > 1\}$. Montrer que

1. $\mathbf{P}(T > n) = 1/n!$,
2. $\mathbf{E}T = e$,

3. $\mathbf{E}S_T = e/2$.

Exercice 6 Deuxième équation de Wald

On suppose que $\mathbf{E}X_1 = 0$ et $\mathbf{E}X_n^2 = \sigma^2 < \infty$. On veut montrer que si T est un temps d'arrêt tel que $\mathbf{E}T < +\infty$, alors

$$\mathbf{E}S_T^2 = \sigma^2 \mathbf{E}T.$$

1. Montrer que si $n \geqslant m \geqslant 0$,

$$\mathbf{E}\left(S_{T\wedge n} - S_{T\wedge m}\right)^2 = \sigma^2 \sum_{k=m+1}^{n} \mathbf{P}(T \geqslant k).$$

2. Conclure.

Exercice 7 Probabilité de sortie d'un intervalle pour la marche aléatoire simple.

On suppose que $\mathbf{P}(X_1 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = -1) = 1/2$. Soit $a < 0$ et $b > 0$ deux entiers. On définit des temps d'arrêt comme suit

$$\forall x \in \mathbf{Z}, T_x = \inf\{n \text{ t.q. } S_n = x\},$$

$$T = T_a \wedge T_b = \inf\{n \text{ t.q. } S_n \notin]a, b[\}.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in]a, b[$, on a $\mathbf{P}(x + S_{b-a} \notin]a, b[) \geqslant 2^{-(b-a)}$.
2. En déduire que

$$\mathbf{P}(T > n(b-a)) \leqslant \left(1 - 2^{-(b-a)}\right)^n$$

   puis que $\mathbf{E}T < +\infty$.
3. A l'aide de l'équation de Wald, montrer que

$$\mathbf{P}(S_T = b) = \frac{-a}{b-a}, \qquad \mathbf{P}(S_T = a) = \frac{b}{b-a}.$$

4. **Application :** j'ai 8 euros et vous avez 2 euros. Nous décidons de jouer des parties de pile ou face (avec une pièce non biaisée) d'un enjeu de 1 euro jusqu'à ce que l'un d'entre nous soit ruiné. Quelle est la probabilité que ce soit vous qui soyez ruiné ?
5. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{Z}$, $\mathbf{P}(T_x < \infty) = 1$.
6. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{Z}^*$, $\mathbf{E}T_x = \infty$.

Exercice 8 Vendre une maison de manière optimale

On suppose que $\mathbf{E}X_1^+ < \infty$. On fixe $c > 0$ et on pose

$$Y_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} X_k - cn.$$

Une interprétation est la suivante. Je souhaite vendre une maison. Je paye c par jour à mon agent immobilier, qui en échange fait visiter la maison à une personne par jour. Cette personne propose un prix d'achat X_n (que l'on suppose être des variables i.i.d. de loi connue). Quand faut-il accepter une offre pour maximiser son espérance de gain ?

1. Pour $a \in \mathbf{R}$, on pose $T_a = \inf\{n \text{ t.q. } X_n > a\}$ et $p = \mathbf{P}(X_1 > a)$. Si $p > 0$, calculer $\mathbf{E}Y_{T_a}$.
2. Montrer qu'il existe une unique solution $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que l'équation $\mathbf{E}(X_1 - \alpha)^+ = c$, et que $\mathbf{E}Y_{T_\alpha} = \alpha$.
3. Soit τ un temps d'arrêt tel que $\mathbf{E}\tau < +\infty$. A l'aide de l'inégalité

$$Y_n \leqslant \alpha + \sum_{k=1}^{n} ((X_k - \alpha)^+ - c),$$

   montrer que $\mathbf{E}Y_\tau \leqslant \alpha$. La stratégie de la question 2. est donc optimale.