Feuille d'exercices numéro 7
Martingales. Théorèmes de convergence.

Exercice 1
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. indépendantes avec $\mathbf{E}\,X_n = 0$ et $\mathbf{Var}\,X_n = \sigma_n^2 < +\infty$. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1,\ldots,X_n)$, $S_n = X_1+\cdots+X_n$ et $s_n^2 = \sigma_1^2+\cdots+\sigma_n^2$ et $Y_n = S_n^2 - s_n^2$. Montrer que (Y_n) est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.

Exercice 2
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. indépendantes intégrables avec $\mathbf{E}\,X_n = 0$, et $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1,\ldots,X_n)$. Pour $k\in\mathbb{N}^*$, on pose

$$Y_n^{(k)} = \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} X_{i_1}\ldots X_{i_k}.$$

Montrer que $(Y_n^{(k)})_{n\geqslant 1}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.

Exercice 3
1. Soient (X_n) et (Y_n) deux sous-martingales (pour la même filtration). On pose $Z_n = \max(X_n, Y_n)$. Montrer que la suite (Z_n) est aussi une sous-martingale.
2. Soit (X_n) une surmartingale. On suppose que $\mathbf{E}\,X_n = 0$ pour tout n. Montrer que (X_n) est une martingale.

Exercice 4 Transformée de martingale.
Soit (X_n) une martingale (resp. une sous-martingale). Soit H_n $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurables dans L^∞ (on dit H_n est prévisible). On pose $(H.X)_n = \sum_{i=1}^n H_i(X_i - X_{i-1})$. Montrer que la suite $((H.X)_n)$ est aussi une martingale (resp. une sous-martingale si $H_n \geqslant 0$).

Exercice 5
Soit (U_n) une suite de v.a. i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$, et $\mathcal{F}_n = \sigma(U_1,\ldots,U_n)$. Soit $a\in[0,1]$. On définit une suite de variables aléatoires (X_n) en posant $X_0 = a$, puis par récurrence,

$$X_{n+1} = \begin{cases} \frac{X_n}{2} & \text{si } X_n \leqslant U_{n+1} \\ \frac{1+X_n}{2} & \text{si } X_n > U_{n+1}. \end{cases}$$

Montrer que (X_n) est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.

Exercice 6 Montrer la première égalité de Wald en utilisant le théorème d'arrêt des martingales.

Exercice 7 Propriétés de l'uniforme intégrabilité.
1. Montrer qu'une famille $(X_i)_{i\in I}$ est uniformément intégrable si et seulement si elle est bornée dans L^1 et équicontinue, c'est-à-dire :$\forall\epsilon>0, \exists\eta>0, P(A)\leqslant\eta \Rightarrow \sup_{i\in I} E(|X_i|1_A)\leqslant\epsilon$.
2. Montrer qu'une suite X_n de variables aléatoires converge dans L^1 vers X si et seulement si (X_n) est uniformément intégrable et X_n converge en probabilité vers X.
3. Soit $p>1$, Montrer que toute partie bornée de L^p est uniformément intégrable.

Exercice 8 Martingales uniformément intégrables.
1. Soit $X\in L^1$ montrer que $\{E(X|\mathcal{F}) | \mathcal{F} \text{ sous} - \text{tribu }\}$ est uniformément intégrable.
2. Soit X_n une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$ qui converge vers X dans L^1, montrer que $X_n = E(X|\mathcal{F}_n)$.
3. Soit une filtration $(\mathcal{F}_n)$ et $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_n)$, montrer que $E(X|\mathcal{F}_n)\to E(X|\mathcal{F}_\infty)$, p.s. et dans L^1.
4. Dans les 3 dernières questions, on considère $\Omega = [0,1)$, $I_{k,n} = [k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$ la partition dyadique et $\mathcal{F}_n = \sigma(I_{k,n}, 0\leqslant k<2^n)$. Soit f une fonction Lipschitz sur $[0,1]$. Soit $X_n(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1}(f((k+1)2^{-n}) - f(k2^{-n}))2^n 1_{I_{k,n}}(x)$. Montrer que X_n est une martingale qui converge presque surement et dans L^p (pour tout $p\in[1,\infty[$) vers X_∞ et que pour tout $a<b$:

$$f(b)-f(a) = \int_a^b X_\infty(\omega)d\omega.$$

5. Soit $f \in L^1(\Omega)$, montrer que $E(f|\mathcal{F}_n) \to f$ dans L^1.
6. Soit P une probabilité sur Ω. Soit λ la mesure de Lebesgue. Posons $X_n = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{P(I_{k,n})}{\lambda(I_{k,n})} 1_{I_{k,n}}$. Montrer que X_n est une martingale qui converge p.s. et en déduire l'existence de la décomposition de Lebesgue de $P = X_\infty d\lambda + \nu$ avec ν étrangère à la mesure de Lebesgue. En déduire que X_n est uniformément intégrable si et seulement si P est absolument continue par rapport à λ.

Exercice 9 Une martingale qui ne converge pas dans L^1

Soit (S_n) une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire $S_0 = 0$ et, pour $n \geqslant 1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ où (X_n) est une suite de v.a. i.i.d. vérifiant $\mathbf{P}(X_1 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = -1) = 1/2$. On pose aussi $\Sigma_n = S_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, $T = \inf\{n \text{ t.q. } \Sigma_n = 0\}$ et $M_n = \Sigma_{T\wedge n}$.

1. Montrer que (M_n) est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.
2. Montrer que (M_n) converge presque sûrement vers 0.
3. Montrer que (M_n) ne converge pas dans L^1.

Exercice 10

Soit (Y_n) une suite de v.a. i.i.d. positives vérifiant $\mathbf{E}\,Y_1 = 1$ et $\mathbf{P}(Y_1 = 1) < 1$. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$, et pour $n \geqslant 1$,

$$X_n = \prod_{k=1}^{n} Y_k.$$

1. Montrer que (X_n) est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.
2. Montrer que (X_n) converge presque sûrement vers une variable aléatoire Z.
3. (*) Montrer que $Z = 0$ (on pourra considérer $\ln X_n$).

Exercice 11 Une martingale qui converge en probabilité, mais pas presque sûrement

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. indépdendantes de loi $\frac{1}{2n}(\delta_1 + \delta_{-1}) + (1 - \frac{1}{n})\delta_0$, et $(\mathcal{F}_n)$ la filtration associée. On définit une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ en posant $Y_1 = X_1$, et pour $n \geqslant 2$,

$$Y_n = \begin{cases} X_n & \text{si } Y_{n-1} = 0, \\ nY_{n-1}|X_n| & \text{si } Y_{n-1} \neq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que (Y_n) est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.
2. Montrer que (Y_n) converge vers 0 en probabilité.
3. Montrer à l'aide du lemme de Borel–Cantelli que (Y_n) ne converge pas vers 0 presque sûrement. Quelle hypothèse fait défaut pour l'application du théorème de convergence presque sûre ?

Exercice 12

Donner un exemple de martingale (X_n) qui converge presque sûrement vers $-\infty$. (0n pourra prendre $X_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, où (ξ_n) est une suite de v. a. indépendantes (mais non i.i.d.) à déterminer.

Exercice 13 Inégalité des nombres de montées de Doob

Pour une suite $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $a < b$, on pose $T_0(\alpha) = 0$ puis pour $k \geqslant 1$:

$$S_k(\alpha) = \inf\{n \geqslant T_{k-1}(\alpha) \mid \alpha_n \leqslant a\} \quad T_k(\alpha) = \inf\{n \geqslant S_k(\alpha) \mid \alpha_n \geqslant b\}$$

$$N_n([a,b],\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{T_k(\alpha)\leqslant n\}} \quad N_\infty([a,b],\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{T_k(\alpha)<\infty\}} \quad H_n([a,b],\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{S_k(\alpha)<n\leqslant T_k(\alpha)\}}$$

$N_\infty([a,b],\alpha)$ donne le "nombre de montées" le long de [a,b] par α.

Soit X une sous martingale adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)$.

1. Vérifier que $T_k(X)$ sont des temps d'arrêt et que $N_n = N_n([a,b],X)$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable.
2. Vérifier que $H_n = H_n([a,b],X)$ est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable et que, si $Y_n = (X_n - a)^+$, $(H.Y)_n \geqslant (b-a)N_n$.
3. Montrer que si $a < b$, $(b-a)E[N_n([a,b],X)] \leqslant E[Y_n - Y_0]$. (utiliser $K_n = 1 - H_n \geqslant 0$)
4. Vérifier que $N_\infty([a,b],\alpha) < \infty \forall a < b \in \mathbb{Q}$ si et seulement si α converge dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
5. Déduire que si X est une sous-martingale bornée dans L^1, X_n converge p.s. vers X_∞ et $E[|X_\infty|] < \infty$.