Feuille d'exercices numéro 8
Martingales (suite).

Exercice 1 La prochaine carte sera rouge !

Soit un jeu de 52 cartes (26 cartes sont noires et 26 cartes sont rouges). On suppose que le jeu est mélangé selon la loi uniforme sur le groupe des permutations $\mathfrak{S}_{52}$. On retourne les cartes du paquet une à une ; soit R_n le nombre de cartes rouges non encore retournées après que l'on a retourné les n premières cartes du paquet (on a donc $R_0 = 26$). Pour $0 \leqslant n < 52$, on définit

$$X_n = \frac{R_n}{52-n}.$$

1. Montrer que (X_n) est une martingale (pour une filtration à préciser).
2. Vous jouez au jeu suivant : à un seul moment, vous avez le droit de dire avant de retourner une carte : « La prochaine carte sera rouge !». Vous gagnez si la prochaine carte retournée est rouge. On cherche quelle stratégie maximise la probabilité de gagner (choisir une stratégie correspond à dire quand il faut s'arrêter en fonction des cartes déjà retournées ; cela revient à choisir un temps d'arrêt). Qu'en pensez-vous ?

Exercice 2 Urnes de Polya

Une urne contient au temps 0 deux boules : une boule rouge et une boule verte. On ajoute des boules dans l'urne en rép ?éant l'opération suivante

- On prend au hasard une boule dans l'urne parmi celles présentes au temps n.
- On replace cette boule dans l'urne, et on ajoute dans l'urne une boule de la même couleur que la boule tirée. On obtient la composition de l'urne au temps $n+1$.

Soit X_n le nombre de boules rouges dans l'urne au temps n, et $Y_n = X_n/(n+2)$ la proportion de boules rouges au temps n.

1. Montrer que (Y_n) est une martingale qui converge p.s. vers une variable aléatoire Z.
2. Montrer que pour tout n, X_n suit une loi uniforme sur l'ensemble $\{1, \ldots, n+1\}$.
3. En déduire la loi de Z.

Exercice 3 Distribution aléatoire du courrier

Monsieur McColl est un facteur peu consciencieux : chaque fois qu'il doit distribuer n colis à n personnes, il les distribue de manière aléatoire (selon la loi uniforme sur le groupe $\mathfrak{S}_n$), indépendemment de ce qu'il a fait les jours précédents.

Le premier jour on donne K colis à distribuer à M. McColl. Il les distribue au hasard, puis les personnes qui ont reçu un colis qui ne leur est pas destiné viennent le rapporter au bureau de poste. Le jour suivant, M. McColl distribue à nouveau les colis qui ont été rapportés. A nouveau les personnes qui n'ont pas reçu le bon colis le rapportent au bureau de poste, et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les paquets aient été distribués correctement.

Soit $T \in \mathbb{N}^*$ le nombre de jours qu'il faut avant que tous les colis soient bien distribués.

1. Question préliminaire : pour $n \geqslant 2$, soit σ une permutation aléatoire choisie selon la loi uniforme sur le groupe $\mathfrak{S}_n$. Montrer que l'espérance et la variance du nombre de points fixes de σ sont égales à 1.
2. Soit A_n le nombre de colis correctement distribués le $n$ème jour, M_n le nombre de colis qui restent à distribuer aprés le $n$ème jour ($M_0 = K$) et $X_n = M_n + n$. Montrer que la suite $(X_{n\wedge T})$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$, où $\mathcal{F}_n = \sigma(A_1, \ldots, A_n)$.
3. En déduire que $\mathbf{E}\, T = K$.
4. On pose $Y_n = X_n^2 + M_n$. Montrer que la suite $(Y_{n\wedge T})$ est une sur-martingale.
5. En déduire que $\mathbf{Var}\, T \leqslant K$.

Exercice 4 Inégalité maximale L^p, $p > 1$

Soit (X_n) une sous-martingale positive pour une filtration $(\mathcal{F}_n)$ et on suppose $p > 1$.

1. On pose $\tau = \inf\{k \in \mathbb{N}\ t.q.\ X_k \geqslant t\}$. Montrer que $tP(\tau \leqslant n) \leqslant E(X_n 1_{\tau \leqslant n})$.
2. On pose $\tilde{X}_n = \sup_{0 \leqslant k \leqslant n} X_k$. Montrer que pour tous $t > 0$;$n \in \mathbb{N}$ et $p > 1$,
$$t^{p-1} P(\tilde{X}_n \geqslant t) \leqslant t^{p-2} E[X_n 1_{\tilde{X}_n \geqslant t}]$$
En intégrant cette inégalité pour t variant entre 0 et $+\infty$, obtenir que
$$\frac{1}{p} E(\tilde{X}_n^p) \leqslant \frac{1}{p-1} E(X_n \tilde{X}_n^{p-1})$$
3. En utilisant judicieusement l'inégalité de Hölder, en déduire que
$$E(\tilde{X}_n^p) \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E(X_n^p)$$

Exercice 5 Absence d'inégalité maximale dans L^1

On reprend les martingales M_n, Σ_n de l'exercice 9 du TD 7.
En utilisant l'exercice 9 du TD 4, montrer que $P(\sup_{n \in \mathbb{N}^*} M_n < M) = \frac{M-1}{M}$.
En déduire que $E(\sup_{n \in \mathbb{N}^*} M_n) = \infty$, puis qu'il n'existe pas de constante C tel que
$$\forall m,\ E(\sup_{n \leqslant m} M_n) \leqslant C E(|M_m|)$$

Exercice 6 Deuxième théorème d'arrêt

Soit $(\mathcal{F}_n)_{n \geqslant 0}$ une filtration, $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_n \mathcal{F}_n)$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N} \cup +\infty}$ un processus adapté. Pour T un temps d'arrêt, on note alors $X_T = \sum_{n \in \mathbb{N} \cup +\infty} X_n 1_{T=n}$.

1. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :
   (i) X est une martingale fermée.
   (ii) pour tout temps d'arrêt T, $X_T \in L^1$ et $E(X_T) = E(X_0)$
   (iii) pour tout temps d'arrêt $T \leqslant S$ $E(X_S|\mathcal{F}_T) = X_T$
2. Soit $Y \in L^1$ et S, T des temps d'arrêt. En déduire que :
$$E(E(Y|\mathcal{F}_T)|\mathcal{F}_S) = E(E(Y|\mathcal{F}_S)|\mathcal{F}_T) = E(Y|\mathcal{F}_{T \wedge S})$$

Exercice 7 Ruine du joueur Soit $S_n = k + \sum_{i=1}^n X_i$ avec X_i des variables indépendantes de même loi $p\delta_1 + q\delta_{-1}$ avec $p \in]0,1[-\{1/2\}$. On considère la filtration de X_n.

1. Soit $Z_n = (\frac{q}{p})^{S_n}$. Montrer que Z_n est une martingale.
2. Soit $T = \inf\{n \geqslant 0 \mid X_n = 0 \text{ ou } X_n = m\}$, montrer que :
$$P(X_T = m) = \frac{(\frac{q}{p})^k - 1}{(\frac{q}{p})^m - 1} \qquad P(X_T = 0) = \frac{(\frac{q}{p})^m - (\frac{q}{p})^k}{(\frac{q}{p})^m - 1}$$

Exercice 8 Loi du logarithme itéré

Soit $(X_n)_{n \in N}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On définiti $S_k = X_1 + .. + X_k$. Le but de l'exercice est de montrer que p.s. :
$$\limsup_{n \to \infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \log\log n}} \leqslant 1.$$
Soit $h(x) = \sqrt{2x \log\log x}$.

1. Montrer que pour tous $\theta > 0$ et $c > 0$, on a $P(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} S_k \geqslant c) \leqslant e^{-\theta c} E(e^{\theta S_n})$. En déduire que
$$P(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} S_k \geqslant c) \leqslant e^{-c^2/2n}.$$
2. Soit K>1. Majorer la quantité :
$$P(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} S_k \geqslant K h(K^{n-1}),$$
et montrer que $\limsup_{n \to \infty} S_n/h(n) \leqslant K p.s.$ Conclure.