Université Claude Bernard Mathématiques
M1 Probabilités

Feuille d'exercices numéro 9
Mouvement Brownien.

Dans tous les exercices, $(B_t, t \geqslant 0)$ désigne un mouvement brownien réel standard partant de 0 défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Exercice 1 Non dérivabilité des trajectoires
Montrer que p.s., on a :

$$\limsup_{t \searrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty \quad \text{et} \quad \liminf_{t \searrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty.$$

En déduire que pour tout $s \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto B_t$ n'est p.s. pas dérivable à droite en s.
Indication : Considérer $A_k = \{B_{\epsilon_k}/\sqrt{\epsilon_k} > M\}$ pour $M > 0$ ϵ_k décroissant vers 0.

Exercice 2 Variation quadratique du mouvement brownien.
Soient a et b tels $0 \leqslant a \leqslant b$. On pose, pour $n \geqslant 0$,

$$X_n = \sum_{n=1}^{2^n} (B_{a+k(b-a)2^{-n}} - B_{a+(k-1)(b-a)2^{-n}})^2.$$

Calculer la moyenne et la variance de X_n, puis trouver la limite *p.s.* de la suite X_n. En déduire que p.s. $t \mapsto B_t$ n'est pas à variation finie sur aucun intervalle§. ON rappelle que la variation d'une fonction f est la limite des sommes $\sum_{i=1}^{p} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$ quand le pas de la partition $a = t_0 < t_1, ... < t_p = b$ tend vers 0.

Exercice 3 Intégrale stochastique. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to L^2(\Omega)$ une fonction en escalier à support compact de la forme pour $0 = t_0 < t_1 < ... < t_p$:

$$f = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i 1_{]t_{i-1}, t_i]}.$$

On suppose $\lambda_i \in \mathcal{F}_s := \sigma(B_s, s \leqslant t_{i-1})$.
On pose

$$I(f) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}).$$

1. Montrer que les applications étagées du type ci-dessus sont dense dans $L^2_{ad}(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega), dt) = \{f \in L^2(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega), dt) f_s \in L^2(\mathcal{F}_s)\}$
2. Montrer que $f \mapsto I(f)$ s'étend de manière unique en un application isométrique de $L^2_{ad}(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega), dt)$ dans $L^2(\Omega)$. On note se prolongement
$$I(f) = \int_0^\infty f(s) dB_s.$$
3. On note $\int_0^t f(s) dB_s = \int_0^\infty 1_{[0,t]}(s) f(s) dB_s$. Montrer que pour $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe C^1, on a :
$$\int f(s) dB_s = h(t) B_t - \int h'(s) B_s ds.$$
4. Montrer que
$$\int 2 B_s dB_s = B_t^2 - t.$$

Exercice 4 On pose $S_1 = \sup_{t \in [0,1]} B_t$. Montrer que l'on a la convergence en loi :

$$\left(\int_0^t e^{B_s} ds \right)^{1/\sqrt{t}} \to_{t \to \infty} e^{S_1}.$$

Exercice 5 Soient $d_1 = \inf\{t \geqslant 1 : B_t = 0\}$ et $g_1 = \sup\{t \leqslant 1 : B_t = 0\}$. Calculer les lois de d_1 et g_1.