Université Claude Bernard | Mathématiques
M1 Probabilités

Examen final du 31 mai 2013
Corrigé succinct

Exercice 1

1. VRAI : par un théorème du cours, (X_n) converge dans L^1 vers une v.a. X. On a donc $|\mathbf{E}|X_n| - \mathbf{E}|X|| \leqslant \|X_n - X\|_{L^1}$, donc $(\mathbf{E}|X_n|)$ converge vers $\mathbf{E}|X|$.
2. VRAI : on a vu en cours qu'une chaîne de Markov irréductible à espace d'états finis est nécessairement récurrente positive, et donc admet une unique mesure de probabilité invariante.
3. VRAI : $\mathbf{E}[B_{n+1}|\mathcal{F}_n] = B_n + \mathbf{E}[B_{n+1} - B_n|\mathcal{F}_n] = B_n$ par la propriété de Markov.

Exercice 2

1. Les points (i) et (ii) découlent des propriétés analogues pour le mouvement brownien. On calcule pour $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$,
$$\mathbf{E}\, P_s P_t = \mathbf{E}(B_s - sB_1)(B_t - tB_1) = s - st - st + st = s(1-t).$$
2. Le point (i) découle de la propriété analogue pour le mouvement brownien. On calcule pour $0 \leqslant s \leqslant t < 1$
$$\mathbf{E}\, Q_s Q_t = (1-s)(1-t)\, \mathbf{E}\, B_{\frac{s}{1-s}} B_{\frac{t}{1-t}} = s(1-t)$$
et ce calcul est aussi valable pour $t = 1$. Il est clair que $t \mapsto Q_t$ est p.s. continue sur $[0,1[$. La continuité en 1 nécéssite une justification. Au cours de la preuve de la propriété d'inversion du temps, on a vu que
$$\lim_{t\to 0} tB_{1/t} = 0 \text{ p.s.}$$
Le changement de variable $u = 1/(1+t) \iff t = (1-u)/u$ donne alors
$$0 = \lim_{u\to 1} Q_u = \lim_{u\to 1} \frac{1-u}{u} B_{\frac{u}{u-1}} = \lim_{u\to 1} (1-u) B_{\frac{u}{u-1}} \text{ p.s.}$$

Exercice 3

On pose $C_t = \frac{1}{\sqrt{2}}(B_t^{(1)} - B_t^{(2)})$. On vérifie que $(C_t)_{t\geqslant 0}$ est un mouvement brownien : en effet c'est une famille gaussienne, la continuité découle de celle de $(B_t^{(1)})$ et $(B_t^{(2)})$, et on a
$$\mathbf{E}\, C_s C_t = \frac{1}{2}(s \wedge t + s \wedge t) = s \wedge t.$$
Par ailleurs, $B_t^{(1)} \leqslant B_t^{(2)}$ équivaut à $C_t \leqslant 0$, et on a vu en cours que p.s. le mouvement brownien prenait des valeurs strictement positives et strictement négatives sur tout intervalle $[0,t]$. Aini l'événement demandé a probabilité 0.

Exercice 4

1. On note $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$. Alors X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, et
$$\mathbf{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = (1 - \lambda X_n) + \lambda X_n\, \mathbf{E}\, \xi_n = X_n.$$
2. Puisque (X_n) est une martingale, on a $\mathbf{E}\, X_n = \mathbf{E}\, X_0 = 1$ pour tout n.
3. Comme (X_n) est une martingale positive, elle converge p.s. ; on note Z sa limite.

4. On calcule par récurrence (en utilisant l'indépendance de X_n et ξ_n)

$$\mathbf{E}\, X_{n+1}^2 = \mathbf{E}[(1+\lambda(\xi_n-1))^2 X_n^2] = \mathbf{E}(1+\lambda(\xi_n-1))^2\, \mathbf{E}\, X_n^2 = (1+\lambda^2)\, \mathbf{E}\, X_n^2,$$

   et donc $\mathbf{E}\, X_n^2 = (1+\lambda^2)^n$. Puisque $\mathbf{E}\, X_n^2$ tend vers $+\infty$, la suite (X_n) ne converge pas dans L^2.
5. On calcule facilement par récurrence que X_n prend la valeur 2^n avec probabilité 2^{-n} et vaut 0 le reste du temps. Il en découle que $Z = 0$. Comme $\mathbf{E}\, Z \neq \mathbf{E}\, X_n = 1$, (X_n) ne converge pas dans L^1 et n'est donc pas uniformément intégrable (on pouvait en fait le vérifier directement à l'aide de la définition).
6. On calcule

$$\mathbf{E}[\sqrt{X_{n+1}}|\mathcal{F}_n] = \mathbf{E}\left[\sqrt{1+\lambda(\xi_n-1)}\right]\sqrt{X_n} = \frac{\sqrt{1+\lambda}+\sqrt{1-\lambda}}{2}\sqrt{X_n},$$

   ce qui montre que le seul choix correct est $\alpha = \frac{2}{\sqrt{1+\lambda}+\sqrt{1-\lambda}}$. Remarquons que $\alpha > 1$ par concavité stricte de la fonction $\sqrt{\cdot}$. Par le théorème de convergence, la martingale positive (M_n) converge presque sûrement vers une v.a. W (avec $W < \infty$ p.s.). On a alors $X_n = \alpha^{-n} M_n^2$ qui converge p.s. vers 0.

Exercice 5

1. C'est un exemple vu en cours ; la matrice de transition est $Q(i, i\pm 1) = 1/2$, les autres termes étant nuls. On peut remarquer que T_R est le temps d'atteinte de $\mathbf{Z}\backslash]-R, R[$.
2. Cela découle du calcul

$$\mathbf{E}[\cos(\theta S_{n+1})|\mathcal{F}_n] = \mathbf{E}[\cos\theta S_n \cos\theta Y_{n+1} - \sin\theta S_n \sin\theta Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \cos\theta S_n \cos\theta.$$

3. Soit $n \in \mathbf{N}$. Puisque le temps d'arrêt $T_R \wedge n$ est borné, le théorème d'arrêt implique que

$$\mathbf{E}\, Z_{T_R\wedge n} = \mathbf{E}\, Z_0 = \cos(\theta x).$$

   On a (par définition de T_R) $|S_{T_R\wedge n}| \leqslant R$. Comme $|\theta R| < \pi/2$, la fonction $x \mapsto \cos\theta x$ atteint son minimum sur $[-R, R]$ en $\pm R$, on a

$$\cos(\theta S_{T_R\wedge n}) \geqslant \cos(\theta R).$$

   Ainsi, $\cos(\theta x) = \mathbf{E}\, Z_{T_R\wedge n} \geqslant \cos(\theta R)\, \mathbf{E}(1/\cos\theta)^{T_R\wedge n}$. Par le théorème de convergence monotone, $\lim \mathbf{E}(1/\cos\theta)^{T_R\wedge n} = \mathbf{E}(1/\cos\theta)^{T_R}$, et le résultat suit.
4. Puisque la v.a. $(\cos\theta)^{-T_R}$ est intégrable, elle est finie p.s., et donc (comme $|\cos\theta| < 1$) T_R est fini p.s.
5. Choisissons $\theta \in]0, \pi/2R[$. On applique l'inégalité de Markov,

$$\mathbf{P}(T_R \geqslant n) = \mathbf{P}((\cos\theta)^{-T_R} > (\cos\theta)^{-n}) \leqslant (\cos\theta)^n\, \mathbf{E}(\cos\theta)^{-T_R} \leqslant (\cos\theta)^n \frac{\cos(\theta x)}{\cos(\theta R)},$$

   d'où le résultat avec $C = \cos(\theta x)/\cos(\theta R)$ et $\beta = \cos\theta$.