Université Claude Bernard
M1 Probabilités Mathématiques

Examen final du 31 mai 2013
Durée : 3 heures

La consultation des notes de cours est autorisée.

Exercice 1

Vrai ou faux ? (justifier brièvement vos réponses)

1. Si $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale uniformément intégrable, la suite $(\mathbf{E}\,|X_n|)_{n\geqslant 0}$ converge.
2. Toute chaîne de Markov irréductible à ensemble d'états fini admet une unique mesure de probabilité invariante.
3. Si $(B_t)_{t\in\mathbf{R}^+}$ est un mouvement brownien, la suite $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une martingale.

Exercice 2

On dit qu'un processus $(P_t)_{0\leqslant t\leqslant 1}$ est un pont brownien si les propriétés suivantes sont vérifiées

(i) La famille $(P_t)_{0\leqslant t\leqslant 1}$ est une famille gaussienne.

(ii) L'événement « la fonction $t \mapsto P_t$ est continue » est mesurable et de probabilité 1.

(iii) On a, pour tous $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$, on a $\mathbf{E}(P_s P_t) = s(1-t)$.

Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien.

1. Pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, on pose $P_t = B_t - tB_1$. Montrer que $(P_t)_{0\leqslant t\leqslant 1}$ est un pont brownien.
2. On pose
$$\begin{cases} Q_t = (1-t)B_{\frac{t}{1-t}} & \text{si } 0 \leqslant t < 1 \\ Q_1 = 0. \end{cases}$$
Montrer que $(Q_t)_{0\leqslant t\leqslant 1}$ est un pont brownien.

Exercice 3

Soient $\left(B_t^{(1)}\right)_{t\geqslant 0}$ et $\left(B_t^{(2)}\right)_{t\geqslant 0}$ deux mouvements browniens indépendants. Calculer
$$\mathbf{P}\left(B_t^{(1)} \leqslant B_t^{(2)} \text{ pour tout } t \geqslant 0\right).$$

Exercice 4

Un joueur dispose initialement de la somme $X_0 = 1$. Il joue à un jeu de hasard, dans lequel il mise à chaque tour une proportion $\lambda \in]0,1]$ de son capital. Il a une chance sur deux de gagner le double de sa mise, et une chance sur deux de perdre sa mise. L'évolution du capital X_n en fonction du temps n est décrite par
$$X_{n+1} = (1-\lambda)X_n + \lambda X_n \xi_n,$$
où les v.a. $(\xi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont i.i.d. avec $\mathbf{P}(\xi_n = 0) = \mathbf{P}(\xi_n = 2) = 1/2$.

1. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une martingale pour une filtration à préciser.
2. Calculer $\mathbf{E}\,X_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
3. Montrer la convergence presque sûre de $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
4. Calculer $\mathbf{E}\,X_n^2$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Est-ce que $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge dans L^2 ?
5. On suppose dans cette question que $\lambda = 1$. Pour tout n, calculer explicitement la loi de X_n. Est-ce que la famille $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est uniformément intégrable ?
6. On suppose dans cette question que $0 < \lambda \leqslant 1$. Déterminer un réel α tel que $M_n = \alpha^n\sqrt{X_n}$ soit une martingale. Montrer ensuite que (X_n) converge vers 0 p.s.

Exercice 5

Pour $x \in \mathbf{Z}$, on considère la marche aléatoire simple sur $\mathbf{Z}$ issue de x. Autrement dit, on se donne une suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ de v.a. i.i.d. de loi uniforme sur $\{-1,1\}$, et on pose $S_0 = x$ et pour $n \geqslant 1$,

$$S_n = x + \sum_{k=1}^{n} Y_k.$$

Soit R un entier tel que $|x| \leqslant R$. On pose

$$T_R = \inf\{n \geqslant 0 \,:\, |S_n| \geqslant R\}.$$

1. Montrer que $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov et en donner la matrice de transition. Montrer que T_R est un temps d'arrêt.
2. Soit $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. On pose
$$Z_n = \frac{\cos(\theta S_n)}{(\cos\theta)^n}.$$
Montrer que $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale pour la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$.
3. Soit $0 < \theta < \frac{\pi}{2R}$. Montrer que
$$\mathbf{E}\left[(\cos\theta)^{-T_R}\right] \leqslant \frac{\cos(\theta x)}{\cos(\theta R)}. \tag{1}$$
Indication : *on pourra considérer les temps d'arrêt $T_R \wedge n$.*
4. En déduire que $\mathbf{P}(T_R < \infty) = 1$.
5. Déduire de (1) qu'il existe $\beta \in]0,1[$ et $C \in]0,+\infty[$ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$\mathbf{P}(T_R \geqslant n) \leqslant C\beta^n.$$