Université Claude Bernard — Mathématiques
M1 Probabilités

Examen partiel du 26 mars 2013 : correction

Exercice 1

1. La chaîne de Markov est irréductible (vérificitation immédiate) et l'espace d'états est fini, donc elle admet une unique mesure de probabilité invariante μ. On la détermine par les équations $\mu(1)+\mu(2)+\mu(3)=1$, $\mu(2)=\mu(1)/2+\mu(2)/3$ et $\mu(3)=\mu(2)/3+\mu(3)/2$, ce qui donne $\mu(1)=4/9, \mu(2)=1/3, \mu(3)=2/9$.
2. Comme $Q(1,1)>0$, la chaîne est apériodique. On a donc par un théorème du cours, pour $k=1,2,3$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_1(X_n=k)=\mu(k).$$

En prenant une combinaison linéaire de ces 3 équations, on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_1 X_n = \lim_{n\to\infty} [\mathbf{P}_1(X_n=1)+2\mathbf{P}_1(X_n=2)+3\mathbf{P}_1(X_n=3)] = 16/9$$

Exercice 2

1. On peut écrire pour $k\in\mathbf{N}*$ et $n\in\mathbf{N}$

$$\tau_F^{(k)} \leqslant n \iff \text{il existe } x_1,\dots,x_k \in F^k \text{ et } 0<n_1<n_2<\cdots<n_k\leqslant n \;:\; X_{n_i}=x_i$$

et l'événement à droite est dans la tribu engendrée par $(X_1,\dots,X_n)$, donc $\tau_F^{(k)}$ est un temps d'arrêt.
2. On montre par récurrence sur k que pour tout $x\in F$, $\mathbf{P}_x(\tau_F^{(k)}<+\infty)=1$. Pour $k=1$, cela découle des hypothèses sur F (une v.a. d'espérance finie est finie p.s.). En supposant que c'est vrai pour k, on peut écrire la propriété de Markov pour le temps d'arrêt $\tau_F^{(k)}$:

$$\mathbf{P}_x(\tau_F^{(k+1)}<+\infty)=\mathbf{P}_x(\tau_F\circ\theta^{\tau_F^{(k)}}<+\infty)=\mathbf{E}_x\mathbf{P}_{X_{\tau_F^{(k)}}}(\tau_F<+\infty)=1$$

en utilisant la propriété pour $k=1$.
3. Soit R la matrice de transition sur F définie par

$$R(x,y)=\mathbf{P}_x(X_{\tau_F}=y).$$

C'est bien une matrice de transition car $\mathbf{P}_x(\tau_F<+\infty)=1$. Vérifions que (Y_k) est une chaîne de Markov de matrice de transition R : pour tous $y_1,\dots,y_k\in F^k$, en utilisant la propriété de Markov pour le temps d'arrêt $\tau_F^{(k-1)}$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_x(Y_1=y_1,\dots,Y_k=y_k) &= \mathbf{P}_x(\underbrace{Y_1=y_1,\dots,Y_{k-1}=y_{k-1}}_{\in\mathcal{F}_{\tau_F^{(k-1)}}}, X_{\tau_F}\circ\theta^{\tau_F^{(k-1)}}=y_k)\\ &= \mathbf{P}_x(Y_1=y_1,\dots,Y_{k-1}=y_{k-1})\mathbf{P}_{y_{k-1}}(X_{\tau_F}=y_k)\\ &= \mathbf{P}_x(Y_1=y_1,\dots,Y_{k-1}=y_{k-1})R(y_{k-1},y_k),\end{aligned}$$

d'où on tire par récurrence sur k que

$$\mathbf{P}_x(Y_1=y_1,\dots,Y_k=y_k)=R(x,y_1)R(y_1,y_2)\cdots R(y_{k-1},y_k)$$

ce qui montre que, sous $\mathbf{P}_x$, $(Y_k)_{k\geqslant1}$ suit la loi $Markov(R,x)$. Il est facile de voir que l'irréductibilité de (X_n) entraîne celle de (Y_k), et comme F est fini, la chaîne (Y_k) est récurrente positive.
4. On a $\tau_F^{(\sigma_x)}=\tau_x$. On en déduit que

$$\tau_x=\sum_{k=0}^{\sigma_x-1}\left(\tau_F^{(k+1)}-\tau_F^{(k)}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\tau_F^{(k+1)}-\tau_F^{(k)}\right)\mathbf{1}_{\{k<\sigma_x\}}$$

5. Prenons l'espérance dans l'égalité précédente

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_x\tau_x &= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{E}_x\left[\left(\tau_F^{(k+1)}-\tau_F^{(k)}\right)\mathbf{1}_{\{k<\sigma_x\}}\right]\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{E}_x[\tau_F\circ\theta^{\tau_F^{(k)}}\underbrace{\mathbf{1}\{k<\sigma_x\}}_{\in\mathcal{F}_{\tau_F^{(k)}}}]\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{E}_x[\mathbf{1}_{\{k<\sigma_x\}}\mathbf{E}_{X_{\tau_F^{(k)}}}\tau_F],
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la propriété de Markov pour le temps d'arrêt $\tau_F^{(k)}$. En majorant $\mathbf{E}_{X_{\tau_F^{(k)}}}\tau_F$ par $K = \sup\{\mathbf{E}_y\tau_F\ :\ y\in F\}$, on en déduit

$$E_x\tau_x \leqslant K\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{E}_x(\mathbf{1}_{\{k<\sigma_x\}}) = K\mathbf{E}_x\sigma_x.$$

Comme $\mathbf{E}_x\sigma_x < +\infty$ (puisque (Y_k) est récurrente positive), on a $\mathbf{E}_x\tau_x < +\infty$, donc (X_n) est récurrente positive.

Exercice 3

1. Si $y\in\mathbf{N}^*$ et $x\in\mathbf{N}$, on a $\mathbf{P}(X_{n+1}=y|X_n=x)=\mathbf{P}(Z_n=y-x)=\mu(y-x)$. Par ailleurs $\mathbf{P}(X_{n+1}=0|X_n=x)=\mathbf{P}(Z_n\leqslant -x)=\mu(]\infty,-x])$. On en tire par réccurence que pour tous $x_1,\dots,x_n\in\mathbf{N}$,

$$\mathbf{P}(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n)=Q(x,x_1)\dots Q(x_{n-1},x_n),$$

où l'on a posé $Q(x,y)=\mu(y-x)$ si $x>0$, et $Q(x,0)=\mu(]-\infty,-x])$.
2. La condition est « $\mu([1,\infty[)>0$ et $\mu(]-\infty,-1])>0$ et $PGCD\{x\in\mathbf{Z}^*,\mu(x)>0\}=1$ ». Il est facile de voir que les deux premières conditions sont nécessaires, et la troisième l'est également car seuls les multiples du PGCD sont accessibles depuis 0. Réciproquement, si on note d^+ le PGCD de $E^+=\{x>0\ :\ \mu(x)>0\}$ et d^- le PGCD de $E^-=\{x<0\ :\ \mu(x)>0\}$, on a $PGCD(d^+,d^-)=1$. Il existe alors $u,v>0$ tels que $ud^+-vd^-=1$ (a priori les u et v donnés par le théorème de Bézout ne sont pas forcément positifs, mais on peut les remplacer par $u+td^-$ et $v+td^+$ pour t assez grand). Si l'on note F^+ (resp. F^-) l'ensemble des combinaisons à coefficients positifs d'éléments de E^+ (resp. E^-), en invoquant le théorème de Schur, il existe un entier N tel que $(Nvd^-+1)d^+\in F^+$ et $(Nud^++1)d^-\in F^-$. On a alors pour tout $k\in\mathbf{N}$,

$$k\rightsquigarrow k+u(d^++Nvd^+d^-)\rightsquigarrow k+u(d^++Nvd^+d^-)-v(d^-+Nud^+d^-)=k+1.$$

Une fois qu'on a montré que $k\rightsquigarrow k+1$, il est facile de voir que la chaîne est irréductible.
3. Par la loi forte des grands nombres, $Z_1+\dots+Z_n$ tend presque sûrement vers $-\infty$, et donc est p.s. négatif pour n assez grand. Si on prend $x=0$, on vérifie par récurrence que $X_n=Z_1+\dots+Z_n$ pour tout $n<\tau$, et donc $X_\tau=0$. Ainsi le point 0 est récurrent.
4. En reprenant le raisonnement de la question précédente, il suffit de montrer que $\mathbf{E}\tau<\infty$. Notons $Y_n=Z_n+1/2$, de sorte que $\mathbf{E}Y_n=0$. En développant on obtient

$$\mathbf{E}(Y_1+\dots+Y_n)^4=\sum_{i,j,k,l=1}^{n}\mathbf{E}(Y_iY_jY_kY_l)$$

En utilisant l'indépendance de (Y_n), on s'aperçoit que les seuls termes non nuls sont ceux pour lesquels $i=j$ et $k=l$, ou $i=k$ et $j=l$, ou encore $i=l$ et $j=k$. Le nombre de termes non nuls est donc majoré par $3n^2$, et chaque terme vaut $\mathbf{E}Y_1^4=(\mathbf{E}Y_1^2)^2=(3/2)^4$. L'inégalité de Markov donne

$$\mathbf{P}(|Y_1+\dots+Y_n|\geqslant t)=\mathbf{P}((Y_1+\dots+Y_n)^4\geqslant t^4)\leqslant\frac{1}{t^4}3n^2\left(\frac{3}{2}\right)^4.$$

Comme $Z_1+\dots+Z_n\geqslant 0$ équivaut à $Y_1+\dots+Y_n\geqslant n/2$, on a

$$\mathbf{P}(\tau>n)\leqslant\mathbf{P}(Z_1+\dots+Z_n\geqslant 0)\leqslant\frac{3^5}{n^2}.$$

On en déduit que

$$\mathbf{E}\tau=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}(\tau>n)<+\infty.$$