Université Claude Bernard
M1 Probabilités Mathématiques

Examen partiel du 26 mars 2013
Durée : 2 heures

Tous les documents sont autorisés.

Exercice 1

On considère la matrice de transition Q suivante, définie sur l'espace d'états $S = \{1, 2, 3\}$.

$$Q = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

On note (X_n) la chaîne de Markov associée, que l'on suppose définie sur l'espace canonique.

1. Montrer que cette chaîne de Markov admet une unique mesure de probabilité invariante, et la déterminer.
2. Calculer
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_1 X_n.$$

Exercice 2

Soit Q une matrice de transition sur un ensemble dénombrable S. On note (X_n) la chaîne de Markov associée à Q, que l'on suppose définie sur l'espace canonique. On suppose que (X_n) est irréductible et qu'il existe un sous-ensemble fini $F \subset S$, tel que pour tout $x \in F$, on ait $\mathbf{E}_x \tau_F < +\infty$, où l'on note

$$\tau_F = \inf\{n > 0 \text{ t.q. } X_n \in F\}.$$

1. On définit par récurrence une suite $(\tau_F^{(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ par $\tau_F^{(0)} = 0$, $\tau_F^{(1)} = \tau_F$, et pour $k \in \mathbf{N}^*$,
$$\tau_F^{(k+1)} = \inf\{n > \tau_F^{(k)} \text{ t.q. } X_n \in F\}.$$
Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, la v.a. $\tau_F^{(k)}$ est un temps d'arrêt.
2. Montrer que pout tout $x \in F$ et pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}_x(\tau_F^{(k)} < +\infty) = 1$.
3. On pose $Y_k = X_{\tau_F^{(k)}}$. Montrer que (Y_k) est une chaîne de Markov sur l'espace d'états F, et que cette chaîne est irréductible et récurrente positive.
4. Pour $x \in F$, on pose
$$\tau_x = \inf\{n > 0 \text{ t.q. } X_n = x\}.$$
$$\sigma_x = \inf\{k > 0 \text{ t.q. } Y_k = x\}.$$
Montrer que
$$\tau_x = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tau_F^{(k+1)} - \tau_F^{(k)}\right) \mathbf{1}_{\{\sigma_x > k\}}.$$
5. Montrer l'inégalité
$$\mathbf{E}_x \tau_x \leqslant \left(\sup_{y\in F} \mathbf{E}_y \tau_F\right) \mathbf{E}_x \sigma_x$$
6. En déduire que la chaîne (X_n) est récurrente positive.

Exercice 3

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbf{Z}$, et $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi μ. Soit $x \in \mathbf{N}$. On définit par récurrence, une suite $(X_n)_{n\geqslant 1=0}$ en posant $X_0 = x$ et, pour $n \in \mathbf{N}$,

$$X_{n+1} = (X_n + Z_n)^+,$$

où l'on a noté $t^+ = \max(t, 0)$.

1. Expliciter une matrice de transition Q sur $\mathbf{N}$ telle que (X_n) soit une chaîne de Markov de loi $Markov(Q, x)$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur μ pour que cette chaîne de Markov soit irréductible.
3. On suppose que Z_0 est intégrable et vérifie $\mathbf{E}Z_0 < 0$. Soit $\tau = \inf\{n \text{ t.q. } Z_1+\cdots+Z_n < 0\}$. Montrer que τ est fini p.s., et en déduire que l'état 0 est récurrent pour la chaîne de Markov (X_n).
4. (*Question difficile*) On suppose dans cette question que μ est la mesure vérifiant $\mu(1) = \mu(-2) = \frac{1}{2}$. Montrer que la chaîne de Markov (X_n) est récurrente positive.