Université Claude Bernard Mathématiques
M1 Probabilités

Examen partiel du 25 mars 2014 : corrigé succinct

Exercice 1

1. Les variables aléatoires (Y_n) ont même loi, car $(X_n, \ldots, X_{n+k-1})$ a même loi que $(X_1, \ldots, X_k)$. Par contre elles ne sont pas indépendantes si $k > 1$ (pour $k = 2$, la fonction $f(x, y) = xy$ est un contre-exemple : X_1X_2 n'est pas indépendant de X_2X_3 en général).
2. Par regroupement par paquets, à i fixé, les v.a. $(Z_n^{(i)})_{n\geqslant 0}$ sont i.i.d., et la loi forte des grands nombres permet de conclure.
3. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(|Y_n| > \varepsilon n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(|Y_1| > \varepsilon n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon(n-1)}^{\varepsilon n} \mathbf{P}(|Y_1| > t)dt = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\infty} \mathbf{P}(|Y_1| > t)dt = \frac{\mathbf{E}|Y_1|}{\varepsilon} < \infty$$

   Le lemme de Borel–Cantelli implique que p.s. $|Y_n|/n \leqslant \varepsilon$ pour n suffisemment grand. C'est vrai simultanément pour tout $\varepsilon > 0$ rationnel, et donc $|Y_n|/n$ tend p.s. vers 0.
4. On découpe la somme par blocs de longueur k, la somme des $i$èmes termes de chaque bloc converge d'après (b), et les termes restants tendent vers 0 d'après (c).

Exercice 2

1. Il est facile de vérifier que $1, 2$ et 3 sont récurrents, alors que $4, 5$ et 6 sont transients.
2. On a $\alpha_3 = 1$, et $\alpha_2 = \alpha_1 = 0$ car le sous-ensemble $\{1, 2\}$ est fermé. On obtient des équations en appliquant la propriété de Markov pour le temps d'arrêt égal à 1

$$\alpha_4 = \frac{1}{3}\alpha_3 + \frac{1}{3}\alpha_4 + \frac{1}{3}\alpha_5,$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{2}\alpha_4 + \frac{1}{2}\alpha_6,$$

$$\alpha_6 = \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{2}{3}\alpha_5.$$

   On obtient $\alpha_4 = 4/5, \alpha_5 = 3/5, \alpha_6 = 2/5$.

Exercice 3

On montre par récurrence sur n la propriété "$\sup\{\mathbf{P}_y(\tau_x > n) \ : \ y \in S\} \leqslant \rho^n$". Pour $n = 0$, la propriété est trivialement vérifiée. Supposons la propriété vraie au rang n. Pour tout $y \in S$, on calcule en utilisant la propriété de Markov au temps 1

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_y(\tau_x > n+1) &= \sum_{z \in S\setminus\{x\}} \mathbf{P}(\tau_x > n+1, X_1 = z) \\
&= \sum_{z \in S\setminus\{x\}} Q(y,z)\mathbf{P}_z(\tau_x > n) \\
&\leqslant \sum_{z \in S\setminus\{x\}} Q(y,z)\rho^n \\
&= (1 - Q(y,x))\rho^n \\
&\leqslant \rho^{n+1}.
\end{aligned}$$

Exercice 4

On a vu en cours que la mesure qui à un sommet associe son nombre de voisins est une mesure invariante. On en déduit l'unique mesure de probabilité invariante en la normalisant : elle vérifie $\pi(A) = \pi(B) = \pi(D) = \pi(E) = 1/6$ et $\pi(C) = 1/3$. Comme par ailleurs $\pi(A)^{-1} = \mathbf{E}_A \tilde{\tau}_A$, on en déduit qu'en moyenne un marcheur partant de A fait 6 pas avant de revenir en A. Par ailleurs, le mesure

$$x \mapsto \mathbf{E}_A \sum_{k=0}^{\tilde{\tau}_A - 1} \mathbf{1}_{X_k = x}$$

est invariante, et comme elle vaut 1 en A elle est égale à 6π. On en déduit qu'un moyenne un marcheur partant de A visite 2 fois C avant de revenir en A.

Exercice 5

1. Pour tout k, la v.a. σ_k est un temps d'arrêt : on vérifie que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\sigma_k \leqslant n \iff \exists\, 0 < n_1 < \cdots < n_k \leqslant n \text{ tels que } X_{n_i} = X_{n_i - 1} \text{ pour tout } 1 \ \leqslant i \leqslant k.$$

et donc l'événement "$\sigma_k \leqslant n$" est réunion finie d'élements de $\mathcal{F}_n$, donc est dans $\mathcal{F}_n$.

2. On montre par récurrence que sur k que $\mathbf{P}_x(\sigma_k < \infty) = 1$ pour tout $x \in S$. Pour $n = 1$, cela se vérifie directement puisque

$$\mathbf{P}_x(\sigma_1 > n) = \mathbf{P}_x(X_1 = X_2 = \cdots = X_n = x) = Q(x,x)^n$$

qui tend vers 0 car $Q(x,x) < 1$. Supposons la propriété au rang $k > 1$ et appliquons la propriété de Markov au temps d'arrêt (fini p.s.) σ_1

$$\mathbf{P}_x(\sigma_{k+1} < \infty) = \sum_{z \in S} \mathbf{P}_x(\sigma_{k+1} < \infty, X_{\sigma_1} = z) = \sum_{z \in S} \mathbf{P}_x(X_{\sigma_1} = z)\mathbf{P}_z(\sigma_k < \infty) = 1.$$

3. On calcule d'abord $\mathbf{P}_x(Y_1 = y)$ comme suit. On a $\mathbf{P}_x(Y_1 = x) = 0$ et pour $y \neq x$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x(Y_1 = y) &= \sum_{n > 1} \mathbf{P}_x(\sigma_1 = n, X_n = y) \\ &= \sum_{n > 1} \mathbf{P}_x(X_n = y, X_{n-1} = \cdots = X_0 = x) \\ &= \sum_{n > 1} Q^{n-1}(x,x) Q(x,y) \\ &= \frac{Q(x,y)}{1 - Q(x,x)}. \end{aligned}$$

On pose donc $R(x,x) = 0$ et $R(x,y) = \frac{Q(x,y)}{1-Q(x,x)}$ si $x \neq y$. Pour montrer que (Y_k) a la loi $Markov(R, x_0)$, on vérifie récurrence sur k que pour tous $x_1, \cdots, x_k$ dans S

$$P(Y_1 = x_1, \cdots, Y_k = x_k) = R(x_0, x_1) \cdots R(x_{k-1}, x_k).$$

Cela ce montre aisément en appliquant la propriété de Markov au temps d'arrêt σ_1.

4. Soit (X_n) la chaîne de Markov de matrice de transition Q définie sur l'espace canonique et (Y_k) comme précédemment. Pour tout x_0, (Y_k) a loi $Markov(R, x_0)$ sous $\mathbf{P}_x$. Si y est transient pour Q, alors $\mathbf{P}_y(X_n \neq y \,\forall n > 0) > 0$ et donc $\mathbf{P}_y(Y_k \neq y \,\forall k > 0) > 0$ ce qui montre que y est transient pour R. Réciproquement, supposons y transient pour R de sorte que $\mathbf{P}_y(Y_k \neq y \,\forall k > 0) > 0$. L'événement $(Y_k \neq y \,\forall k > 0)$ implique que le nombre de visites de (X_n) en y est fini (elles ont lieu avant σ_1). Avec $\mathbf{P}_y$(le nombre de visites de (X_n) en y est fini) > 0, ce qui montre que y est transient pour Q.