Université Claude Bernard | Mathématiques
M1 Probabilités

Examen partiel du 25 mars 2014
Durée : 2 heures

La consultation des notes de cours est autorisée.

Exercice 1

Soit $k > 1$ un entier, et $f : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ une fonction borélienne. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variable aléatoires i.i.d.. On définit une suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ en posant

$$Y_n = f(X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+k-1}).$$

On suppose que Y_1 est intégrable. Le but de l'exercice est de montrer que la suite (Y_n) vérifie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j = \mathbf{E}Y_1 \quad \text{p.s.}$$

1. Les variables aléatoires (Y_n) sont-elles indépendantes ? Sont-elles identiquement distribuées ?
2. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$, soit $(Z_n^{(i)})_{n\geqslant 0}$ la sous-suite de (Y_n) définie par $Z_n^{(i)} = Y_{kn+i}$. Montrer (en utilisant un théorème du cours) que la suite $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j^{(i)}$ converge p.s. vers $\mathbf{E}Y_1$.
3. Montrer à l'aide du lemme de Borel–Cantelli que la suite $\frac{1}{n}Y_n$ converge p.s. vers 0.
4. En déduire le résultat souhaité.

Exercice 2

Soit Q la matrice de transition suivante, sur l'espace d'états $S = \{1, \dots, 6\}$. Soit (X_n) la chaîne de Markov associée, définie sur son espace canonique.

$$Q = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 2/3 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Classifier les états.
2. Pour tout $x \in S$, calculer

$$\alpha_x = \mathbf{P}_x(X_n = 3 \text{ pour tout } n \text{ assez grand}).$$

Exercice 3

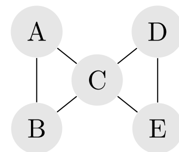
Soit S un ensemble fini ayant au moins deux éléments, et Q une matrice de transition sur S. On suppose que $Q(x,y) > 0$ pour tous x, y dans S. Soit (X_n) la chaîne de Markov associée, définie sur son espace canonique. On fixe $x \in S$, et on note $\tau_x = \inf\{n \geqslant 0 \ : \ X_n = x\}$ le temps d'atteinte de x. Montrer par récurrence que pour tout entier n et tout état $y \in S$, on a

$$\mathbf{P}_y(\tau_x > n) \leqslant \rho^n$$

où $\rho = \max\{1 - Q(y,x) \ : \ y \in S\} < 1$.

Exercice 4

Soit le graphe suivant.



On considère la marche aléatoire sur les sommets de ce graphe, où à chaque étape le marcheur se déplace sur un des sommets voisins, selon la loi uniforme, les choix étant indépendants. On suppose que le marcheur part du sommet A. Calculer

1. En moyenne, le nombre de pas nécessaires pour revenir en A.
2. En moyenne, le nombre de visites en C avant le premier retour en A.

Exercice 5

Soit Q une matrice de transition sur un ensemble fini ou dénombrable S. On fixe $x_0 \in S$, et on se donne une suite $(X_n)_{n \geqslant 0}$ de loi $Markov(Q, x_0)$. On fait l'hypothèse que $Q(x,x) < 1$ pour tout $x \in S$.

1. On définit une suite $(\sigma_k)_{k \geqslant 0}$ de variables aléatoires de la façon suivante : $\sigma_0 = 0$, et pour $k \geqslant 1$,

$$\sigma_k = \inf\{n > \sigma_{k-1} \ : \ X_n \neq X_{n-1}\}.$$

   Est-il vrai que pour tout k, σ_k est un temps d'arrêt pour la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$? (justifier brièvement votre réponse).
2. Montrer que pour tout k, on a $\mathbf{P}(\sigma_k < \infty) = 1$.
3. On définit une suite $(Y_k)_{k \geqslant 0}$ par $Y_k = X_{\sigma_k}$. Montrer que $(Y_k)_{k \geqslant 0}$ est une chaîne de Markov pour une matrice de transition R que l'on précisera.
4. Montrer qu'un état $x \in S$ est récurrent pour la matrice de transition Q si et seulement si il est récurrent pour la matrice de transition R.