Examen du 8 janvier 2013
Durée : 4 heures

Exercice 1

Soit X un espace de Banach et $(S(t))_{t\geqslant 0}$ un semi-groupe C^0 sur X de générateur (A, D_A) et $(M,\omega) \in [1,+\infty[\times \mathbf{R}_+$ tel que, pour tout $t \geqslant 0$, $\|S(t)\| \leqslant M\, e^{\omega\, t}$.

Soit (B, D_B) un opérateur fermé sur X tel que $\displaystyle\bigcup_{t>0} S(t)(X) \subset D_B$ et $\displaystyle\int_0^1 \|BS(\tau)\|\, d\tau < \infty$.

L'objectif est de montrer que $D_A \subset D_B$ et que $(A+B, D_A)$ engendre un semi-groupe C^0.

On se donne $0 < a < 1/2$ tel que $\kappa := \displaystyle\int_0^{2a} \|BS(\tau)\|\, d\tau < 1$.

1. On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des $T \in L^\infty([0,2a], \mathscr{B}(X))$ tels que, pour tout $u_0 \in X$, l'application $[0,2a] \longrightarrow X$, $t \longmapsto T(t)u_0$ soit continue, que l'on munit de la norme usuelle sur $L^\infty([0,2a], \mathscr{B}(X))$.
Justifier que $\mathscr{E}$ est un espace de Banach.
2. Montrer que l'on peut définir $\phi :\ \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}$, par, pour tout $(T,t,u_0) \in \mathscr{E} \times [0,2a] \times X$,
$$\phi(T)(t)u_0 \ = \ S(t)u_0 \ + \ \int_0^t T(t-s)\, B\, S(s)u_0\, ds.$$
3. Montrer que ϕ possède un unique point fixe T.
4. (a) Montrer que, pour tout $0 \leqslant t \leqslant a$, on a
$$\sup_{0\leqslant t'\leqslant a} \|T(t)T(t') - T(t+t')\| \ \leqslant\ \kappa \sup_{0\leqslant t'\leqslant a} \|T(t)T(t') - T(t+t')\|.$$
   (b) En déduire que, por tout $(t,t') \in [0,a]^2$, $T(t)T(t') = T(t+t')$.
5. On étend T par, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$,
$$T(t) = (T(a))^{\lfloor t/a \rfloor} T(t - \lfloor t/a \rfloor a)$$
où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière.
Montrer que $(T(t))_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe C^0.
6. On note (Z, D_Z) son générateur.
   (a) Montrer que si $u_0 \in \bigcup_{t>0} S(t)(X)$, alors $(\mathbf{R}_+)^2 \longrightarrow X$, $(\tau, s) \longmapsto T(\tau)BS(s)u_0$ est continue en $(0,0)$.
   (b) En déduire que, pour tout $u_0 \in \displaystyle\bigcup_{t>0} S(t)(D_A)$, on a : $u_0 \in D_Z$ et $Zu_0 = (A+B)u_0$.
7. (a) Montrer que, pour tout $\lambda > \omega$, on a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda\,\tau} \|BS(\tau)\|\, d\tau < \infty$ et que
$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\,\tau}\|BS(\tau)\|\, d\tau \ = \ 0.$$

(b) En déduire que $D_A \subset D_B$ et que, pour tout $\lambda > \omega$,

$$\|B(\lambda - A)^{-1}\| \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\tau}\|BS(\tau)\|\,d\tau.$$

(c) En déduire qu'il existe $\lambda_0 > \omega$ tel que $]\,\lambda_0, +\infty\,[\, \subset \rho(A+B)$.

(d) Montrer que $\bigcup_{t>0} S(t)(D_A)$ est un domaine essentiel pour $A+B$.

(e) En déduire que $A + B \subset Z$.

(f) Conclure.

Exercice 2

Soit $S = \mathbf{Z}^d$, et $\Sigma = \{0,1\}^S$. On considère un système de particules associé à des taux de transition $c(x,\sigma)$. On note L et $(P_t)_{t\geqslant 0}$ le générateur et le semigroupe associés. On rappelle les notations du cours : pour $f : \Sigma \to \mathbf{R}$ et $x, y \in S$

$$\Delta_f(x) = \sup_{\sigma\in\Sigma} f(\sigma_x) - f(\sigma), \quad |||f||| = ||\Delta_f||_{\ell_1(S)}, \quad D = \{f \in C(\Sigma) \,:\, |||f||| < +\infty\},$$

$$\varepsilon = \inf_{x\in S, \sigma\in\Sigma}[c(x,\sigma) + c(x,\sigma_x)], \quad \gamma(x,y) = \mathbf{1}_{x\neq y} \sup_{\sigma\in\Sigma}[c(x,\sigma_y) - c(x,\sigma)],$$

On note Γ l'opérateur sur $\ell_1(S)$ dont la matrice est $(\gamma(x,y))$ et $M = \|\Gamma\|_{\ell_1(S)\to\ell_1(S)}$. On suppose que

1. Les taux de transitions sont bornés : il existe une constante $C \in \mathbf{R}$ telle que pour tout $x \in S$ et $\sigma \in \Sigma$, on ait $0 \leqslant c(x,\sigma) \leqslant C$.
2. Les interactions sont à portée finie : il existe un entier N telle que si $x, y \in \mathbf{Z}^d$ vérifient $\|x-y\|_{\ell_1} > N$, alors $\gamma(x,y) = 0$.

On rappelle la borne montrée dans le cours : si $f \in D$, alors pour tout $t \geqslant 0$, $P_t f \in D$ et $x \in S$,

$$\Delta_{P_t f}(x) \leqslant e^{-\varepsilon t}[e^{t\Gamma}\Delta_f](x)$$

1. Soit $f, g \in D$. Pour $t \geqslant 0$, on définit

$$G(t) = L[P_t f P_t g] - [P_t f][L P_t g] - [L P_t f][P_t g]$$

(a) Montrer que G est bien définie, et que $t \mapsto G(t)$ est une fonction continue de $\mathbf{R}^+$ dans $C(\Sigma)$.

(b) Pour tout $t \geqslant 0$, montrer la majoration

$$\|G(t)\|_\infty \leqslant C \sum_{x\in S} \Delta_{P_t f}(x)\Delta_{P_t g}(x).$$

2. Soit $f, g \in D$. On définit également, pour $t \geqslant 0$

$$F(t) = P_t[fg] - [P_t f][P_t g].$$

(a) Montrer que F est dérivable et vérifie pour tout $t \geqslant 0$,

$$F'(t) = LF(t) + G(t).$$

(b) Montrer que

$$\frac{d}{ds} P_{t-s}F(s) = P_{t-s}G(s).$$

(c) En déduire que

$$\|F(t)\|_\infty \leqslant C \int_0^t e^{-2\varepsilon s} \sum_{x\in S} [e^{s\Gamma}\Delta_f](x)[e^{s\Gamma}\Delta_g](x).$$

3. Pour $T \subset S$, on note $C_T(\Sigma) \subset C(\Sigma)$ le sous-espace des fonctions qui ne dépendent que des coordonnées dans T :

$$C_T(\Sigma) = \{g \in C(\Sigma) \,:\, g(\sigma) = g(\tau) \text{ dès lors que } \sigma_{|T} = \tau_{|T}\}.$$

Montrer le résultat suivant, qui exprime le fait qu'en temps borné, les coordonnées éloignées évoluent « presque indépendemment » : si on note B_n la boule de centre 0 et de rayon n dans $\mathbf{Z}^d$, alors pour tout t_0 et toute fonction $f \in C(\Sigma)$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{g \in C_{S\setminus B_n}(\Sigma), |g|\leqslant 1} \sup_{0\leqslant t\leqslant t_0} ||P_t(fg) - P_t f P_t g||_\infty = 0.$$

Exercice 3

Soit $\beta \geqslant 0$. On considère le système de particules sur $\{0,1\}^{\mathbf{Z}^d}$ défini par les taux de transition

$$c(x,\sigma) = \left[1 + e^{2\beta\#\{y\sim x\,:\,\sigma(y)=\sigma(x)\}-2\beta\#\{y\sim x\,:\,\sigma(y)\neq\sigma(x)\}}\right]^{-1}.$$

On rappelle que l'on écrit $x \sim y$ lorsque x et y sont voisins dans $\mathbf{Z}^d$. Ce système de spin est-il attractif ? Montrer que ce système admet une unique mesure invariante lorsque

1. $d = 1$.
2. $d = 2$ et $\beta < \frac{1}{4}\log 3$.

Exercice 4

Soit $S = \{1,2\}$, et considérons les deux Q-matrices suivantes

$$Q_1 = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} -\beta & \beta \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Donner une condition nécessaire sur α, β pour qu'il existe un espace de probabilité sur lequel on peut définir les processus (X_t) et (Y_t), où

1. (X_t) a la loi d'une chaîne de Markov à temps continu, de Q-matrice Q_1, issue de 1.
2. (Y_t) a la loi d'une chaîne de Markov à temps continu, de Q-matrice Q_2, isuue de 1.
3. $X_t \leqslant Y_t$ pour tout $t \geqslant 0$.

Indications : *On rappelle qu'un processus de Poisson $(N_t)_{t\geqslant 0}$ d'intensité λ peut être défini par*

$$N_t = \operatorname{card}\{k \geqslant 1 \,:\, \tau_1 + \cdots + \tau_k \leqslant t\},$$

où (τ_n) est une suite de v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre λ. On a de plus la propriété suivante : si (η_n) est une suite de v.a. i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre p, indépendante de (τ_n), alors le processus

$$N'_t = \operatorname{card}\{k \geqslant 1 \,:\, \tau_1 + \cdots + \tau_k \leqslant t \text{ et } \eta_k = 1\}$$

a la loi d'un processus de Poisson d'intensité λp.

Exercice 5

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe. On note $\|\cdot\|_\infty$ la norme d'opérateur sur $B(\mathcal{H})$, et $\|A\|_1 = \operatorname{tr}|A|$. On note $B_{sa}(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs (bornés) auto-adjoints.

1. Soient $A, B, C \in B(\mathcal{H})$ tels que l'opérateur $\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix}$ soit autoadjoint positif dans $B(\mathcal{H} \otimes \mathbf{C}^2)$. Montrer que $\|B\|_\infty^2 \leqslant \|A\|_\infty \|C\|_\infty$.
   Indication : *on pourra, en le justifiant, se ramener au cas où il existe une base hilbertienne dans laquelle l'opérateur B est diagonal.*

2. Soit $\Phi : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ une application positive. On va comparer les quantités suivantes

$$\|\Phi\|_{1\to\infty} = \sup_{A \in B(\mathcal{H}), \|A\|_1 \leqslant 1} \|\Phi(A)\|_\infty,$$

$$\|\Phi\|_{1\to\infty}^{sa} = \sup_{A \in B(\mathcal{H}), \|A\|_1 \leqslant 1} \|\Phi(A)\|_\infty.$$

Montrer que

$$\|\Phi\|_{1\to\infty} = \sup_{x,y \in \mathcal{H}, \|x\|=\|y\|=1} \|\Phi(|x\rangle\langle y|)\|_\infty,$$

$$\|\Phi\|_{1\to\infty}^{sa} = \sup_{x \in \mathcal{H}, \|x\|=1} \|\Phi(|x\rangle\langle x|)\|_\infty.$$

3. Montrer que si Φ est complètement positive, alors $\|\Phi\|_{1\to\infty} = \|\Phi\|_{1\to\infty}^{sa}$.
Indication : *considérer* $\Phi \otimes \mathrm{Id}_{B(\mathbf{C}^2)}(|u\rangle\langle u|)$, *où* $u = x \otimes (1,0) + y \otimes (0,1)$ *et utiliser la question 1.*