Feuille d'exercices numéro 2
Semigroupes de Feller

Exercice 1 Mouvement uniforme
Soit (P_t) le semi-groupe de Feller défini sur $C_0(\mathbf{R})$ par $P_t f(x) = f(t+x)$. Calculer le générateur de (P_t).

Exercice 2 Mouvement brownien
Calculer le générateur du semigroupe de Feller associé au mouvement brownien (on déterminera précisément le domaine)

Exercice 3
Existe-t-il un semigroupe de Feller sur $C_0(\mathbf{R})$, dont l'action du générateur $\mathcal{L}$ sur les fonctions suffisemment régulières est données par $\mathcal{L}f = f'''$?

Exercice 4 Mouvement brownien réfléchi en 0
On se place sur l'espace canonique des processus de Markov à valeurs dans $\mathbf{R}$. Si (B_t) désigne le mouvement brownien, on définit le mouvement brownien réfléchi en 0 comme

$$Y(t) = |B_t|.$$

Montrer que $Y(t)$ définit un semigroupe de Feller sur $C_0(\mathbf{R}^+)$, et calculer son générateur.

Exercice 5 Mouvement brownien absorbé en 0
On se place sur l'espace canonique des processus de Markov à valeurs dans $\mathbf{R}$, et on note τ le temps d'atteinte de 0. Si (B_t) désigne le mouvement Brownien, on définit le mouvement brownien absorbé en 0 comme

$$X(t) = \begin{cases} B_t & \text{si } t < \tau \\ 0 & \text{si } t \geqslant \tau \end{cases}.$$

Montrer que $X(t)$ définit un semigroupe de Feller sur $C_0(\mathbf{R}^+)$, et calculer son générateur.

Exercice 6 Semigroupe d'Ornstein–Uhlenbeck
Pour $t \geqslant 0$ et $f \in C_0(\mathbf{R})$, on définit

$$P_t f(x) = \mathbf{E} f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}Z)$$

où Z est une variable aléatoire gaussienne $N(0,1)$. Montrer que (P_t) est un semi-groupe de Feller sur $C_0(\mathbf{R})$. Calculer son générateur, et montrer qu'il admet une unique mesure invariante.

Exercice 7 Processus de Cauchy
La loi de Cauchy de paramètre λ a pour densité

$$x \mapsto \frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}.$$

Montrer que l'on définit un semi-groupe de Feller sur $C_0(\mathbf{R})$ en posant

$$(P_t f)(x) = \mathbf{E} f(x + Z_t)$$

où la variable Z_t suit une loi de Cauchy de paramètre t. Calculer le générateur de ce semi-groupe.

a