

Feuille d'exercices numéro 3
Systèmes de particules

Dans toute cette feuille, S désigne un ensemble infini dénombrable, et $\Sigma = \{0, 1\}^S$, muni de la topologie produit.

Exercice 1

Soit $f : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}$ vérifiant

$$\|f\| := \sum_{x \in S} \sup_{\sigma \in \Sigma} |f(\sigma_x) - f(\sigma)| < +\infty.$$

Est-ce que f est continue ?

Exercice 2 Particules indépendantes

Soient β et δ deux fonctions de S dans \mathbf{R}_*^+ . On pose

$$c(x, \sigma) = \begin{cases} \beta(x) & \text{si } \sigma(x) = 0, \\ \delta(x) & \text{si } \sigma(x) = 1. \end{cases}$$

Montrer que l'opérateur \mathcal{L} associé définit un semigroupe de Feller sur $C(\Sigma)$, et qu'il admet une unique mesure invariante.

Remarque : les taux de transition $c(x, \sigma)$ ne sont pas supposés bornés, et on sort du cadre traité en cours

Exercice 3 Mouvements d'opinion ("noisy voter model")

On cherche à modéliser par un système de particules le processus suivant : chaque point $x \in \mathbf{Z}^2$ représente un électeur, dont l'opinion $\sigma(x)$ peut prendre les valeurs 0 et 1. On suppose que les opinions évoluent (indépendamment) selon les règles suivantes ($\beta, \delta \geq 0$ étant des paramètres).

1. Un électeur qui a l'opinion 0 change d'opinion spontanément à un taux β .
2. Un électeur qui a l'opinion 1 change d'opinion spontanément à un taux δ .
3. Si un électeur x est voisin d'un électeur y , alors l'électeur x convainc l'électeur y d'adopter la même opinion que lui à un taux 1.

Ecrire le générateur du système correspondant, montrer qu'il est bien défini, et donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une unique mesure invariante.

Exercice 4

Soient μ_1 et μ_2 deux mesures de probabilité sur Σ , avec $\mu_1 \leq_{st} \mu_2$. On suppose que μ_1 et μ_2 ont les mêmes marginales 1-dimensionnelles, c'est-à-dire que pour tout $x \in S$

$$\mu_1(\{\sigma \in \Sigma \text{ t.q. } \sigma(x) = 1\}) = \mu_2(\{\sigma \in \Sigma \text{ t.q. } \sigma(x) = 1\}).$$

Montrer que $\mu_1 = \mu_2$.