Feuille d'exercices numéro 5
Applications complètement positives, semigroupes de Lindblad

Exercice 1 (**Théorème de Kraus en dimension finie**)
Soit $\Phi : B(\mathbf{C}^d) \to B(\mathbf{C}^k)$ une application $\mathbf{C}$-linéaire. Montrer (sans utiliser les résultats du cours) l'équivalence entre les énoncés suivants :

1. Φ est complètement positive.
2. $\exists N \in \mathbf{N}$, $\exists A_1, \ldots, A_N \in B(\mathbf{C}^d, \mathbf{C}^k)$ tels que $\Phi(X) = \sum A_i X A_i^*$ pour tout $X \in B(\mathbf{C}^d)$.
3. $\exists N \in \mathbf{N}$, $\exists V \in B(\mathbf{C}^d, \mathbf{C}^k \otimes \mathbf{C}^N)$ tel que $\Phi(X) = \mathbf{Tr}_{\mathbf{C}^N} VXV^*$ pour tout $X \in B(\mathbf{C}^d)$.

Indication : l'implication la plus difficile est (1) $\Rightarrow$ (2) ; on pourra choisir $n = d$, appliquer l'opération $\Phi \otimes \mathrm{Id}$ à la matrice positive

$$E = \sum_{i,j} E_{ij} \otimes E_{ij} = \left| \sum_i e_i \otimes e_i \right\rangle \left\langle \sum_i e_i \otimes e_i \right|$$

(où (e_i) est la base canonique de $\mathbf{C}^d$ et $E_{ij} = |e_i\rangle\langle e_j|$), puis diagonaliser $(\Phi \otimes \mathrm{Id})(E)$.
Quelle majoration de N donne la preuve ?

Exercice 2 Si A est une matrice $d \times d$, on note $\mathbf{diag}(A)$ la matrice diagonale obtenue en remplaçant les coefficients non-diagonaux de A par 0.

1. Montrer que l'application $\Phi : B(\mathbf{C}^d) \to B(\mathbf{C}^d)$ définie par $\Phi(A) = d\,\mathbf{diag}(A) - A$ est complètement positive (Indication : calculer U^*AU, où U est une matrice diagonale dont les coefficients sont des racines $n$èmes de l'unité).
2. Est-ce que l'application $\Phi : A \mapsto (d-1)\,\mathbf{diag}(A) - A$ est complètement positive ?

Exercice 3 On considère l'application $\Phi : B(\mathbf{C}^d) \to B(\mathbf{C}^d)$ définie par

$$\Phi(X) = \mathbf{Tr}(X)\frac{\mathrm{Id}}{d}.$$

Montrer que Φ est complètement positive, et expliciter des matrices $(U_i)_{1 \leqslant i \leqslant N} \in B(\mathbf{C}^d)$ telles que

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^N U_i X U_i^\dagger.$$

Montrer que la plus petite valeur possible de N est d^2.

Exercice 4
Soit H désigne un espace de Hilbert séparable complexe de dimension infinie, et A un opérateur auto-adjoint (non borné) sur H, et $U_t = \exp(itA)$ le semi-groupe d'unitaires associé. On considère le semigroupe (P_t) sur $B(H)$ défini par

$$P_t(X) = U_t X U_t^*.$$

Montrer que A est borné si et seulement si (P_t) est un semigroupe continu en norme, i.e.

$$\lim_{t\to 0} \|P_t A - A\|_{B(H)} = 0$$

pour tout $A \in B(H)$.