Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre automne 2021–2022**

L1 UE : Fondamentaux des mathématiques (INFO)

Correction du Contrôle numéro 1 du 01 Octobre 2021

Exercice 1 (4 points) Soient E, F des ensembles, et $f\colon E \to F$ une application. Donnez la définition de :

— f est injective

— f est surjective

— f est bijective

Correction C'est du cours. A chaque fois, l'une des définitions suffit.
f est injective si chaque élément de son codomaine (nom de son domaine d'arrivée, c'est à dire F) admet **au plus** un antécédent par f. En symboles, f est injective si

$$\forall x_1, x_2 \in E, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

Remarque : Le lien entre ces deux définitions n'est peut-être pas clair pour vous, l'une parle des éléments de E, l'autre de ceux de F... Il faut comprendre que celle en symboles dit : " deux éléments différents x_1 et x_2 de E donnent des images différentes par f". Ceci est bien la même chose que "un élément de F ne peut pas avoir plus d'un antécédent par f". f est surjective si chaque élément de son codomaine (nom de son domaine d'arrivée, c'est à dire F) admet **au moins** un antécédent par f. En symboles, f est surjective si

$$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y.$$

f est bijective si chaque élément de son codomaine (nom de son domaine d'arrivée, c'est à dire F) admet **exactement** un antécédent par f. Dit autrement, f est bijective si elle est à la fois injective et surjective. En symboles, f est bijective si

$$\forall y \in F, \exists! x \in E, f(x) = y.$$

Exercice 2 (3 points) Soient k et n deux entiers naturels, avec $k \leqslant n$.

1. Donner la définition avec des factorielles de $\binom{n}{k}$.
2. Montrer ensuite que $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Correction C'est encore du cours.

1. $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

2.
$$\begin{aligned}\binom{n+1}{k+1} &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!}\\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-k-1)!}\\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}\\ &= \frac{(n+1)n!}{(k+1)k!(n-k)!}\\ &= \frac{n+1}{k+1}\frac{n!}{k!(n-k)!}\\ &= \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}\end{aligned}$$

Exercice 3 (3 points) Calculer
$$\sum_{k=12}^{23} \ln(k+1) - \ln(k)$$

Correction
On remarque une somme telescopique. On a donc
$$\sum_{k=12}^{23} \ln(k+1) - \ln(k) = ln(23+1) - ln(12) = ln(24) - ln(12) = ln(\frac{24}{12}) = ln(2).$$

On ne demandait pas de preuve, cette rédaction minimaliste était donc tout à fait acceptable. Bien sûr, si vous vouliez montrer que vous aviez compris comment fonctionnent les sommes telescopiques ou vous rassurer en écrivant le processus menant au résultat, c'était très bien aussi.

Exercice 4 (5 points) On rappelle les formules suivantes, valables pour tout $m \in \mathbf{N}$:
$$\sum_{k=0}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

On pose, pour $n \in \mathbf{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\left(\frac{i}{2}+j\right)$.

1. Calculer S_0, S_1.
2. Soit $i \in \mathbf{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{j=0}^{i}\left(\frac{i}{2}+j\right)$.
3. Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer S_n.

Correction C'est une variante de l'exercice 6 du TD 1.

1.
$$S_0 = \sum_{i=0}^{0}\sum_{j=0}^{i}\left(\frac{i}{2}+j\right) = 0/2 + 0 = 0$$

(En effet, il n'y a qu'un seul terme dans cette somme, lorsque i et j valent tous les deux 0)

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{i}\left(\frac{i}{2}+j\right) \\
&= (\frac{0}{2}+0)+(\frac{1}{2}+0)+(\frac{1}{2}+1) \\
&= 2
\end{aligned}$$

Remarque : les trois termes entre parenthèses de la deuxième ligne correspondent respectivement à $i=0=j$ (premier terme), à $i=1, j=0$ (deuxième terme) et à $i=1=j$ (dernier terme).

2.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{i}\left(\frac{i}{2}+j\right) &= \sum_{j=0}^{i}\frac{i}{2}+\sum_{j=0}^{i} j \\
&= \frac{i}{2}\sum_{j=0}^{i} 1+\frac{i(i+1)}{2} \\
&= \frac{i(i+1)}{2}+\frac{i(i+1)}{2} \\
&= i(i+1) = i^2+i
\end{aligned}$$

Explications : Pour passer de la ligne 2 à la ligne 3, on remarque que $\frac{i}{2}$ est une constante par rapport à j et se factorise. On utilise aussi la formule donnée par l'énoncé des i premiers entiers. Pour passer de la ligne 3 à la ligne 4, on somme $i+1$ fois 1 (une fois pour chaque valeur de j).

3. En utilisant les résultats de la question précédente, puis les formules données par l'énoncé, on a :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=0}^{n} i^2+i \\
&= \sum_{i=0}^{n} i^2+\sum_{i=0}^{n} i \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2} \\
&= n(n+1)[\frac{2n+1}{6}+\frac{1}{2}] \\
&= n(n+1)[\frac{2n+1}{6}+\frac{3}{6}] \\
&= n(n+1)\frac{2n+1+3}{6} \\
&= n(n+1)\frac{2n+4}{6} \\
&= n(n+1)\frac{2(n+2)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}
\end{aligned}$$

Remarque : On peut vérifier cette formule sur les résultats obtenus à la question 1. On obtient bien $S_0 = \frac{0*1*2}{3} = 0$ et $S_1 = \frac{1*2*3}{3} = 2$.

<u>**Exercice 5**</u> (5 points) Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{-3}{2}\}$ qui vérifient $\dfrac{-2}{2x+3} > 1$.

Correction   C'est la première question de l'exercice 10 du TD1, avec des valeurs numériques différentes. 'Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{-3}{2}\}$.

On amène le terme de gauche à droite :

$$\frac{-2}{2x+3} > 1 \Longleftrightarrow 0 > 1 + \frac{2}{2x+3}.$$

On calcule le dénominateur en commun, et on trouve

$$0 > 1 + \frac{2}{2x+3} \Longleftrightarrow 0 > \frac{2x+5}{2x+3}.$$

En dressant un tableau de signes (difficile Ã faire en LaTeX), on conclut que l'inégalité est vérifiée pour $x \in]-5/2, -3/2[$.