

Contrôle numéro 1 du 01 Octobre 2021

Durée : 40 minutes

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

Exercice 1 (4 points) Soient E, F des ensembles, et $f: E \rightarrow F$ une application. Donnez la définition de :

- f est injective
- f est surjective
- f est bijective

Exercice 2 (3 points) Soient k et n deux entiers naturels, avec $k \leq n$.

1. Donner la définition avec des factorielles de $\binom{n}{k}$.
2. Montrer ensuite que $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k}$.

Exercice 3 (3 points) Calculer

$$\sum_{k=12}^{23} \ln(k+1) - \ln(k)$$

Exercice 4 (5 points) On rappelle les formules suivantes, valables pour tout $m \in \mathbf{N}$:

$$\sum_{k=0}^m k = \frac{m(m+1)}{2} \text{ et } \sum_{k=0}^m k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

On pose, pour $n \in \mathbf{N}$, $S_n = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \left(\frac{i}{2} + j\right)$.

1. Calculer S_0, S_1 .
2. Soit $i \in \mathbf{N}$. Calculer $\sum_{j=0}^i \left(\frac{i}{2} + j\right)$.
3. Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer S_n .

Exercice 5 (5 points) Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{-3}{2}\}$ qui vérifient $\frac{-2}{2x+3} > 1$.