Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre automne 2021–2022**

L1 UE : Fondamentaux des mathématiques (INFO)

Correction du contrôle numéro 2 du 15 Octobre 2021

Exercice 1 - **Fonctions usuelles (questions de cours)** (4 points)

QCM. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables où g ne s'annule jamais. Soit $x \in I$.

1. La dérivée du quotient $\frac{f}{g}$ au point x est donnée par $\boxed{\textbf{(iii)}\ \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{g'(x)f(x)}{g(x)^2}}$.
   En effet, en mettant sur le même dénominateur, on obtient bien $\frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2} = \left(\frac{f}{g}\right)'(x)$.
2. Si $I = \mathbb{R}$, alors f est paire si et seulement si $\boxed{\textbf{(i)}\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)}$.
   Il s'agit de la définition vue en cours.
3. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. Alors $\boxed{\textbf{(iii)}\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) < 0}$.
   Il s'agit d'un exemple vu en cours.
4. La fonction f est croissante si et seulement si $\boxed{\textbf{(ii)}\ \forall x_1 \in I, \forall x_2 \in I, x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)}$.
   Il s'agit de la définition vue en cours.

Exercice 2 - **Ensembles et applications** (6 points)

Soient $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,5\}$ et $C = \{6\}$ trois ensembles. Soit $f : \{1,2,3,4,5\} \to \{6,7,8\}$ une application telle que $f(1) = 6$, $f(2) = f(5) = 8$, $f(3) = f(4) = 7$.

1. On a $\boxed{A \cap B = \{1\}}$, $\boxed{A \cup C = \{1,2,3,4,6\}}$ et $\boxed{B \cap C = \emptyset}$.
2. On a d'une part $\boxed{f(A \cap B) = f(\{1\}) = \{6\}}$. D'autre part, comme $f(A) = f(\{1,2,3,4\}) = \{6,7,8\}$, $f(B) = f(\{1,5\}) = \{6,8\}$ on a donc $\boxed{f(A) \cap f(B) = \{6,8\}}$. Ainsi,
   $$f(A \cap B) = \{6\} \subset \{6,8\} = f(A) \cap f(B).$$

Exercice 3 - **Injectivité, surjectivité, bijectivité** (5 points)

1. **QCM.**
   (a) L'application $f : \mathbb{R} \to [0,+\infty[$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est $\boxed{\textbf{(ii)}\ \text{Surjective}}$.
   En effet, soit $y \in [0,+\infty[$, *alors il existe* $x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}$ *tel que* $y = f(x) = x^2$, *ce qui veut dire que* f *est surjective. Par contre* f *n'est pas injective car (par exemple)* $x_1 = -1$ *et* $x_2 = 1$ *sont tels que* $x_1 \neq x_2$ *et* $f(x_1) = f(x_2) = 1$. *Ce sont deux nombres différents qui ont la même image par* f.

   (b) Soient E et F deux ensembles, alors l'application $f : E \to F$ est surjective si et seulement si $\boxed{\textbf{(ii)}\ \forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)}$.
   Il s'agit de la définition donnée en cours.

2. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) = n^2 + 1$. $\boxed{\text{Cette application est injective}}$. En effet, soit $n_1 \in \mathbb{N}$ et $n_2 \in \mathbb{N}$, on a

$$f(n_1) = f(n_2) \Longrightarrow n_1^2 + 1 = n_2^2 + 1 \Longrightarrow n_1^2 = n_2^2 \Longrightarrow n_1 = n_2$$

car $n_1 \geq 0$ et $n_2 \geq 0$.
Par contre, $\boxed{f \text{ n'est pas surjective}}$ car (par exemple) l'entier $m = 6$ n'a pas d'antécédent $n \in \mathbb{N}$ par f. En effet, pour $n \geq 0$,

$$6 = f(n) \Longrightarrow n^2 + 1 = 6 \Longrightarrow n^2 = 5 \Longrightarrow n = \sqrt{5} \notin \mathbb{N}.$$

On en déduit que $\boxed{f \text{ n'est pas bijective}}$, car f n'est pas surjective.

<u>Exercice 4</u> - Raisonnements logiques et quantificateurs (5 points)

1. Donner la négation non(P_1) de l'assertion P_1 suivante :

$$P_1 : \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y - 4x + x^2 \leqslant 0.$$

Réponse : $\boxed{\text{non}(P_1) : \exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y - 4x + x^2 > 0}$.

2. Donner la négation non(P_2) de l'assertion P_2 suivante :

$$P_2 : (\forall x \in \mathbb{R}, x = |x|) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, x = -|x|).$$

Réponse : $\boxed{\text{non}(P_2) : (\exists x \in \mathbb{R}, x \neq |x|) \text{ et } (\exists x \in \mathbb{R}, x \neq -|x|)}$.

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Exprimer uniquement avec des quantificateurs en n'utilisant que des symboles les assertions suivantes

(a) f est la fonction nulle.
Réponse : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0}$.

(b) L'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
Réponse : $\boxed{\exists ! x \in \mathbb{R}, f(x) = x}$.