Contrôle numéro 2 du 15 Octobre 2021

Durée : 40 minutes

Attention: le sujet est recto/verso

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

Exercice 1 **- Fonctions usuelles (questions de cours)** (4 points)

QCM. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables où g ne s'annule jamais. Soit $x \in I$. Donner la réponse correcte pour chacune des questions suivantes parmi **(i)**, **(ii)** et **(iii)**, sans justification.

1. La dérivée du quotient $\dfrac{f}{g}$ au point x est donnée par

   (i) $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ **(ii)** $\dfrac{f'(x)g(x)+g'(x)f(x)}{g(x)^2}$ **(iii)** $\dfrac{f'(x)}{g(x)} - \dfrac{g'(x)f(x)}{g(x)^2}$

2. Si $I = \mathbb{R}$, alors f est paire si et seulement si

   (i) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$ **(ii)** $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)$ **(iii)** $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2$

3. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Alors :

   (i) f est paire **(ii)** f est décroissante sur $\mathbb{R}^*$ **(iii)** $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) < 0$.

4. La fonction f est croissante si et seulement si

   (i) $\forall x \in I, f'(x) > 0$ **(ii)** $\forall x_1 \in I, \forall x_2 \in I, x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$ **(iii)** sa dérivée s'annule.

Exercice 2 **- Ensembles et applications** (6 points)

Soient $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,5\}$ et $C = \{6\}$ trois ensembles. Soit $f : \{1,2,3,4,5\} \to \{6,7,8\}$ une application telle que $f(1) = 6$, $f(2) = f(5) = 8$, $f(3) = f(4) = 7$.

1. Déterminer $A \cap B$, $A \cup C$ et $B \cap C$.
2. Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Exercice 3 **- Injectivité, surjectivité, bijectivité** (5 points)

1. **QCM.** Donner la réponse correcte pour chacune des questions suivantes parmi **(i)**, **(ii)** et **(iii)**, sans justification.
   (a) L'application $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est

   (i) Injective **(ii)** Surjective **(iii)** Bijective

   (b) Soient E et F deux ensembles, alors l'application $f : E \to F$ est surjective si et seulement si

   (i) $\forall x \in E,\ \exists y \in F,\ y = f(x)$ **(ii)** $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)$ **(iii)** $\forall x, y \in E,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

2. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) = n^2 + 1$. Cette application est-elle ou non injective, surjective ou bijective ? Justifier rigoureusement votre réponse.

Exercice 4 - **Raisonnements logiques et quantificateurs** (5 points)

1. Donner la négation non(P_1) de l'assertion P_1 suivante :

$$P_1 : \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y - 4x + x^2 \leqslant 0.$$

2. Donner la négation non(P_2) de l'assertion P_2 suivante :

$$P_2 : (\forall x \in \mathbb{R}, x = |x|) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, x = -|x|).$$

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Exprimer uniquement avec des quantificateurs en n'utilisant que des symboles les assertions suivantes
   (a) f est la fonction nulle.
   (b) L'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.