Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre automne 2021–2022**

L1 UE : Fondamentaux des mathématiques (INFO)

Correction du Contrôle numéro 3 du 05 Novembre 2021

Exercice 1 (6 points)

1) Soit a et b des nombres réels. Donnez les formules de :

i) $\sin(a+b)$

ii) $\cos(a+b)$

iii) $\sinh(a+b)$

iv) $\cosh(a+b)$

2) Soient f et g deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. Donner la formule de la dérivée de $f \circ g$ en x c'est à dire $(\mathrm{f}\circ g)'(x)$.

Correction

1)

i) $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

ii) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

iii) $\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \sinh b \cosh a$

iv) $\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b$

2) $(f \circ g)'(x) = g'(x)f'(g(x))$.

Exercice 2 (4 points)

a) Calculer $\cosh(\ln 2)$ et $\sinh(\ln 2)$.

b) À l'aide de la formule de calcul du $\cosh(a-b)$, résoudre l'équation d'inconnue réelle x :

$$5\cosh(7x) - 3\sinh(7x) = 4\cosh(3x)$$

Correction

a) $\cosh(\ln 2) = \dfrac{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}{2} = \dfrac{2 + e^{\ln \frac{1}{2}}}{2} = \dfrac{2 + \frac{1}{2}}{2} = \dfrac{\frac{5}{2}}{2} = \dfrac{5}{4}.$

$\sinh(\ln 2) = \dfrac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2} = \dfrac{2 - e^{\ln \frac{1}{2}}}{2} = \dfrac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \dfrac{\frac{3}{2}}{2} = \dfrac{3}{4}.$

b) $5\cosh(7x) - 3\sinh(7x) = 4\cosh(3x)$

$\Longleftrightarrow \frac{5}{4}\cosh(7x) - \frac{3}{4}\sinh(7x) = \cosh(3x)$

$\Longleftrightarrow \cosh(\ln 2)\cosh(7x) - \sinh(\ln 2)\sinh(7x) = \cosh(3x)$

$\Longleftrightarrow \cosh(7x - \ln 2) = \cosh(3x)$

$\Longleftrightarrow 7x - \ln 2 = 3x$ ou $7x - \ln 2 = -3x$

$\Longleftrightarrow 7x - 3x = \ln 2$ ou $7x + 3x = \ln 2$

$\Longleftrightarrow 4x = \ln 2$ ou $10x = \ln 2$

$\Longleftrightarrow x = \frac{\ln 2}{4}$ ou $x = \frac{\ln 2}{10}$

L'ensemble des solutions de l'équation donnée est $S = \{\frac{\ln 2}{10}, \frac{\ln 2}{4}\}$.

Exercice 3 (4 points) Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sin^3\left(x^2+1\right)$

b) $g(x) = \ln|\tan(x)|$

Correction

a) $f'(x) = (2x)\left(\cos\left(x^2+1\right)\right)\left(3\sin^2\left(x^2+1\right)\right) = 6x\cos\left(x^2+1\right)\sin^2\left(x^2+1\right)$

b) $g'(x) = \dfrac{\frac{1}{\cos^2(x)}}{\tan(x)} = \dfrac{1}{\cos^2(x)\tan(x)} = \dfrac{1}{\cos(x)\sin(x)} = \dfrac{2}{2\cos(x)\sin(x)} = \dfrac{2}{\sin(2x)}$

Exercice 4 (6 points) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de réels définie par

$$u_0 = u_1 = 1 \text{ et } u_{n+1} = u_n + \frac{2}{n+1}u_{n-1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Démontrer que $u_n \leqslant n^2$ pour tout entier naturel non nul n.

Correction Pour tout entier naturel non nul n, on note $P(n)$: " $u_n \leqslant n^2$ ". On a :

$P(1)$: "$u_1 \leqslant 1$".

Comme $u_1 = 1$ alors $P(1)$ est vraie.

$P(2)$: "$u_2 \leqslant 4$".

$u_2 = u_1 + \frac{2}{2}u_0 = 1 + 1 = 2.$

Donc $P(2)$ est vraie.

Soit $n \geq 2$. On suppose $P(k)$ vraie pour tout entier naturel $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$P(n+1)$: " $u_{n+1} \leqslant (n+1)^2$ ".

On a $u_{n+1} = u_n + \frac{2}{n+1}u_{n-1}$.

Comme $P(n)$ et $P(n-1)$ sont vraies alors $u_n \leqslant n^2$ et $u_{n-1} \leqslant (n-1)^2$.

Donc $u_{n+1} \leqslant n^2 + \frac{2}{n+1}(n-1)^2$.

$u_{n+1} \leqslant \frac{n^2(n+1)+2(n-1)^2}{n+1}$.

$u_{n+1} \leqslant \frac{n^3+n^2+2n^2-4n+2}{n+1}$.

$u_{n+1} \leqslant \frac{n^3+3n^2-4n+2}{n+1}$.

Il suffit de montrer $\frac{n^3+3n^2-4n+2}{n+1} \leqslant (n+1)^2$. Soit R cette proposition. On va montrer que R est vraie.

$R \iff \frac{n^3+3n^2-4n+2}{n+1} \leqslant (n+1)^2 \iff n^3+3n^2-4n+2 \leqslant (n+1)^3 \iff n^3+3n^2-4n+2 \leqslant n^3+1+3n^2+3n$

$R \iff -4n+2 \leqslant 1+3n \iff 1 \leqslant 7n \iff n \geq \frac{1}{7}$.

Comme $n \geq \frac{1}{7}$ est vraie alors R est vraie.

Donc $\frac{n^3+3n^2-4n+2}{n+1} \leqslant (n+1)^2$.

Comme $u_{n+1} \leqslant \frac{n^3+3n^2-4n+2}{n+1}$ alors $u_{n+1} \leqslant (n+1)^2$.

Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

En conclusion, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul n.

Donc $u_n \leqslant n^2$ pour tout entier naturel non nul n.