Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre automne 2021–2022**
L1 | UE : Fondamentaux des mathématiques (INFO)

Contrôle numéro 4 du 19 Novembre 2021

Durée : 40 minutes

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

Exercice 1 (5 points)

a) Donner les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui représentent :
- La rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de centre 0. (1 point)
- L'homothétie de rapport 2 et de centre $1+i$. (1 point)

b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $l \in \mathbb{R}$. Définir mathématiquement le fait que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$. (3 points)

Correction

a) $f : z \to e^{i\frac{\pi}{4}} z$

b) $f : z \to 2(z-1-i)+1+i$

c) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N} :$ $(n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leqslant \varepsilon)$

Exercice 2 (5 points) On pose $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$.

a) Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de z. (2 points)

b) Calculer le module et un argument de z. (2 points)

c) En déduire la forme trigonométrique de z. (1 point)

Correction

a) On a :

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1-i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)} \\ &= \frac{\sqrt{3}+i-3i+\sqrt{3}}{3+1} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i. \end{aligned}$$

Donc $\Re(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\Im(z) = -\frac{1}{2}$.

b) On voit que : $|z| = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 1$.

Soit θ un argument de z. Nécessairement, θ vérifie :

$$\begin{cases} cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ sin\theta = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Donc $\theta = -\frac{\pi}{6}$ convient.

c) On a donc : $z = cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

Exercice 3 (5 points)

a) Donner les racines carrées du nombre complexe : $c = 3 + 4i$ (3 points).

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^2 + \sqrt{3}z - i = 0$. (2 points)

Correction

a) Soit $z = x + iy$ une racine carrée de c. Nécessairement, x et y vérifient les relations suivantes :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = |c| = \sqrt{9+16} = 5 \end{cases}$$

On obtient donc :
— En sommant les lignes 1 et 3 : $2x^2 = 8$
— En soustrayant la ligne 1 à la ligne 3 : $2y^2 = 2$
— Par la ligne 2 : x et y ont même signe
Finalement, on trouve que les 2 racines carrées de c sont : $2 + i$ et $-2 - i$.

b) Le discriminant de ce polynôme est : $\Delta = 3 + 4i$. Ainsi, les solutions sont : $z_1 = \frac{-\sqrt{3}+2+i}{2}$ et $z_2 = \frac{-\sqrt{3}-2-i}{2}$.

Exercice 4 (5 points)

Soit $c \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que les n solutions complexes de l'équation $z^n = c$ sont appelées les racines n-ième de c.

a) Donner les 3 racines 3-ième de -1, qu'on notera z_1, z_2 et z_3. (3 points)

b) Montrer que $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. (2 points)

Correction

a) On remarque que $-1 = e^{i\pi}$. Soit $z = \rho e^{i\theta}$ une racine troisième de -1. Nécessairement, ρ et θ vérifient les relations suivantes :

$$\begin{cases} \rho^3 = 1 \\ 3\theta = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

On obtient donc que $\rho = 1$ et $\theta \in \{\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\}$.
Donc $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = e^{i\pi} = -1$, $z_3 = e^{i\frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) On a bien : $z_1 + z_2 + z_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$.