Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre automne 2021–2022**

L1 UE : Fondamentaux des mathématiques (INFO)

Contrôle numéro 5 du 3 Decembre 2021

Durée : 40 minutes

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

Exercice 1 (5 points)

a) Donner la définition de $pgcd(m,n)$ ou $m,n \in \mathbb{Z}^*$.
Vrai ou Faux : $pgcd(m,n)$ ne divise pas toujours $ppcm(m,n)$. (2 points)

b) Vrai ou Faux : Toute suite croissante minorée converge toujours vers un nombre réel. (1 point)

c) Vrai ou Faux : Une suite décroissante est toujours majorée. (1 point)

d) Vrai ou Faux : Une suite croissante et majorée est toujours convergente. (1 point)

Correction

a) Pour $m,n \in \mathbb{Z}$, $pgcd(m,n)$ est le plus grand nombre entier divisant a la fois m et n. Faux : $pgcd(m,n)$ divise m et n donc divise tout multiple de m et n, y compris $ppcm(m,n)$.

b) Faux. Par exemple la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante minorée qui ne coverge pas vers un nombre reel.

c) Vrai. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un suite decroissante on a $u_0 \geq u_n$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

d) Vrai. Une suite croissante et majorée est toujours convergente, c'est un theoreme du cours.

Exercice 2 (8 points)

Soit $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie récursivement par $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{4}u_n^2$.

a) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, quelle est sa limite ? (2 points)

b) En exprimant $u_{n+1} - u_n$ de manière appropriée, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. (2 points)

c) On suppose que $u_0 \leqslant 2$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Quelle est sa limite ? (2 points).

d) On suppose que $u_0 > 2$. Montrer (par récurrence) que $u_n \geq u_0 + \frac{1}{4}(u_0-2)^2 n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Qu'est ce que cela implique pour la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? (2 points)

Correction

a) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, notons par l sa limite. On a que $lim_{n\longrightarrow\infty}u_n = lim_{n\longrightarrow\infty}u_{n+1} = l$. On a donc par la definition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que $l = 1 + \frac{1}{4}l^2$ donc $l^2 - 4l + 4 = 0$ donc $(l-2)^2 = 0$ et alors $l = 2$. Tout cela montre que si la suite converge sa limite est egal a 2.

b) $u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{1}{4}u_n^2 - u_n = \frac{1}{4}(u_n - 2)^2 \geq 0$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.

c) Si $u_0 \leqslant 2$ montrons par recurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majoree par 2. Pour $n = 0$ cela est vrai par definition. Suppons que $u_n \leqslant 2$, on a alors (en utilisant l'hypothese de la recurrence) que $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{4}u_n^2 \leqslant 1 + \frac{1}{4}2^2 = 2$ cqfd. Avec b) on deduit alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majoree, donc d'apres le theoreme du cours elle converge. En applicant a) on conclut que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2.

d) Pour $n = 1$ on que $u_1 - u_0 = \frac{1}{4}(u_0 - 2)^2 - u_0 = u_0^2 + 1 > 0$ donc $u_1 > u_0 + \frac{1}{4}(u_0 - 2)^2$ On suppose que $u_n > u_0 + \frac{1}{4}(u_0 - 2)^2 \cdot n$

On a alors que $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}(u_n - 2)^2 > \frac{1}{4}(u_0 - 2)^2$ car $u_n - 2 > u_0 - 2 > 0$ et la fonction $y(t) = t^2$ est croissante pour $t > 0$ donc $\frac{1}{4}(u_n - 2)^2 > \frac{1}{4}(u_0 - 2)^2$. Tout cela donne $u_{n+1} > u_n + \frac{1}{4}(u_0 - 2)^2$ et en utilisant l'hypothese de la reccurence on a que $u_{n+1} > u_0 + \frac{1}{4}(u_0 - 2)^2 \cdot n + \frac{1}{4}(u_0 - 2)^2 = u_0 + \frac{1}{4}(u_0 - 2)^2 \cdot (n + 1)$ cqfd.

Cela implique qu'on a $lim_{n \longrightarrow \infty} u_n = \infty$, la suite diverge.

Exercice 3 (8 points)

a) Calculer $pgcd(88, 132)$ puis $ppcm(16, 36)$ (1 point).

b) Peut-on trouver $m, n \in \mathbb{Z}$ avec $12m + 21n = 2$? (justifier votre réponse) (1 points)

c) Peut-on trouver $m, n \in \mathbb{Z}$ avec $24m + 15n = 9$? (justifier votre réponse) (2 points)

d) Déterminer tous les couples (m, n) d'entiers naturels de $pgcd(m, n) = 55$ et de $ppcm(m, n) = 330$. (3 points).

Correction

a) $88 = 11 \cdot 2^3$ et $132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$ donc $pgcd(88, 132) = 2^2 \cdot 11 = 44$. Ensuite $16 = 2^4$ et $36 = 2^2 \cdot 3^2$ donc $ppcm(16, 36) = 2^4 \cdot 3^2 = 144$.

b) Non. En general si $\exists k \in \mathbb{Z}$ avec $12m + 21n = k$ alors $pgcd(12, 21)$ divise k,or $pgcd(12, 21) = 3$ et 3 ne divise pas 2 donc on ne peut pas trouver $m, n \in \mathbb{Z}$ avec $12m + 21n = 2$.

c) Oui. $pgcd(24, 15) = 3$ donc d'apres le theoreme de Bezout, on peut trouver $m, n \in \mathbb{Z}$ avec $24m+15n = 3$ (precisement $m = 2$ et $n = -3$) donc $24m \cdot 3 + 15n \cdot 3 = 3 \cdot 3 = 9$. Donc on peut choisir $m = 6$ et $n = -9$, et on a alors $24 \cdot 6 + 15 \cdot (-9) = 9$.

d) $ppcm(m, n) = 330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 55 \cdot 6$, aussi $pgcd(m, n) = 55$ donc le couple (m, n) verifie $m = 55 \cdot k$ et $n = 55 \cdot l$ ou $k, l \in \mathbb{N}$ et $kl = 6$ donc tout les couples possibles sont $(55, 330), (110, 165), (165, 110), (330, 55)$.