Université Claude Bernard - Lyon 1 — **Semestre automne 2021–2022**

L1 — UE : Fondamentaux des mathématiques (INFO)

Contrôle numéro 5 du 3 Décembre 2021

Durée : 40 minutes

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

Exercice 1 (5 points)

a) Donner la définition de $pgcd(m, n)$ où $m, n \in \mathbb{Z}^*$.
Vrai ou Faux : $pgcd(m, n)$ ne divise pas toujours $ppcm(m, n)$. (2 points)

b) Vrai ou Faux : Toute suite croissante minorée converge toujours vers un nombre réel. (1 point)

c) Vrai ou Faux : Une suite décroissante est toujours majorée. (1 point)

d) Vrai ou Faux : Une suite croissante et majorée est toujours convergente. (1 point)

Exercice 2 (8 points)

Soit $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie récursivement par $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{4}u_n^2$.

a) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, quelle est sa limite ? (2 points)

b) En exprimant $u_{n+1} - u_n$ de manière appropriée, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. (2 points)

c) On suppose que $u_0 \leqslant 2$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Quelle est sa limite ? (2 points).

d) On suppose que $u_0 > 2$. Montrer (par récurrence) que $u_n \geq u_0 + \frac{1}{4}(u_0 - 2)^2 n, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Qu'est ce que cela implique pour la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? (2 points)

Exercice 3 (7 points)

a) Calculer $pgcd(88, 132)$ puis $ppcm(16, 36)$ (1 point).

b) Peut-on trouver $m, n \in \mathbb{Z}$ avec $12m + 21n = 2$? (justifier votre réponse) (1 points)

c) Peut-on trouver $m, n \in \mathbb{Z}$ avec $24m + 15n = 9$? (justifier votre réponse) (2 points)

d) Déterminer tous les couples (m, n) d'entiers naturels de $pgcd(m, n) = 55$ et de $ppcm(m, n) = 330$. (3 points).