Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre automne 2021–2022**

L1 UE : Fondamentaux des mathématiques (INFO)

Contrôle numéro 6 du 10 Décembre 2021

Durée : 40 minutes

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Vous devrez faire attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct. **N'écrivez pas au crayon à papier.**

Exercice 1 (6 points)

1. Donnez la définition du coefficient dominant d'un polynôme.
   C'est le coefficient du monôme de plus haut degré du polynôme.
2. (Vrai) : $ppcm(a, b)|(ab)$.
3. (Vrai) : Pour p premier, $(p|a^2) \Leftrightarrow (p^2|a^2)$.
4. (Faux) : Le $ppcm(a, b)$ ne divise jamais a.
5. (Faux) : Un polynôme ne possédant que des racines multiples est de degré pair.
6. (Vrai) : Dans $\mathbf{C}[X]$, si P et P' ne sont pas premiers entre eux, alors P a une racine multiple.

Exercice 2 (3 points) Pour $n \in \mathbf{N}$, quels sont les restes possibles de $38 + 14^n - 12^n$ divisé par 13 ?

Correction $38 + 14^n - 12^n \equiv 12 + 1^n - (-1)^n \equiv (-1)^{n+1}$ donc les restes possibles sont 1 et 12.

Exercice 3 (6 points) On considère l'équation $15x - 42y = 6$.

1. Calculez pgcd(15,42) et déterminez un couple d'entiers solution de l'équation.
2. Déterminez tous les couples d'entiers solutions de l'équation.

Correction

1. $42 = 2*15+12$, $15 = 1*12+3$ et $12 = 4*3$, donc pgcd(15,42)=3. On a alors $3 = 15-12 = 3*15-1*42$ ce qui donne $6 = 6*15 - 2*42$, ainsi $(6, 2)$ est un couple solution.
2. $15x = 42y \Leftrightarrow 5x = 14y$ donc $x = 14k$ et $y = 5k$, les solutions sont donc les couples $(6+14k, 2+5k)$.

Exercice 4 (5 points) Dans $\mathbf{R}[X]$ on considère l'équation $P'(X^2) = 2P(X)$.

1. Déterminez les solutions constantes de l'équation.
2. Soit P une solution non constante. Prouvez que le degré de P doit être 2.
3. Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ une solution. Que doivent vérifier a, b et c ?

Correction

1. $P = a \Rightarrow P' = 0$, on a donc $0 = 2a$. La seule solution est le polynôme nul.
2. Si $deg(P) = n$, $deg(2P) = n$ et $deg(P'(X^2)) = 2(n-1)$ donc $2n - 2 = n$ soit $n = 2$.
3. Pour $P = aX^2 + bX + c$, $P' = 2aX + b$, on a donc $2aX^2 + b = 2aX^2 + 2bX + 2c$. Par identification on a $b = c = 0$, et a est quelconque non nul.